

1. LA NUMERATION

1. LA NUMERATION	1
1. NOTION DE NOMBRE	2
1.1. Le comptage	2
1.2. Notion de nombre naturel	3
1.3. Conservation du nombre	4
1.4. Représentations du nombre	5
1.5. Décompositions d'un nombre	6
1.6. Prélude à la numération : groupement, échange	6
1.7. Aspects méthodologiques	6
2. LA NUMERATION	8
2.1. Les différents types de numération	8
2.2. Etude de quelques systèmes de numération	9
2.3. Bases	13
2.4. Exercices (particulièrement conseillés !)	15
2.5. Aspects méthodologiques	16
2.6. Introduction des bases à l'école primaire	20
2.7. Références et outils sur ce sujet	20
3. OPERATIONS SUR LES NOMBRES	21
3.1. Généralités	21
3.2. Les 4 opérations fondamentales : sens, définitions, propriétés	23
3.3. Un matériel : les réglettes Cuisenaire	31
3.4. Propriétés des opérations	32
3.5. Les tables	34
4. CALCUL MENTAL	35
5. CALCUL ECRIT	38
5.1. L'addition écrite	38
5.2. La soustraction écrite	38
5.3. La multiplication	40
5.4. La division	41
6. LES FAMILLES DE NOMBRES	44
6.1. Nombres pairs, impairs, multiples de, diviseurs de	44
6.2. Les caractères de divisibilité	46
6.3. Décomposition d'un naturel en produit de facteurs	48
6.4. Pgcd - ppcm	50
7. LES NOMBRES NEGATIFS	54
8. LES FRACTIONS	55
8.1. Vocabulaire	55
8.2. Fractions équivalentes	57
8.3. Opérations sur les fractions	57
9. LES NOMBRES A VIRGULE	63
9.1. Notion de virgule	63
9.2. Comparaison des nombres à virgule	65
9.3. Nombre à virgule et fraction	68
10. CONSTRUCTION DE L'ALGEBRE	69
11. TEST RECAPITULATIF (LIBRE)	71
12. CORRECTIONS D'EXERCICES	72
13. REMEDIATIONS	85
13.1. Bases	85
13.2. Preuve par neuf	86

1. NOTION DE NOMBRE

Question préliminaire

Quelles sont les différences entre les notions de quantité, de chiffre et de nombre ?

Il est important à l'issue de cette section de pouvoir bien faire la différence entre les notions de quantité, nombre, chiffre et numération. Des confusions sont courantes de la part des élèves et malheureusement parfois présentes chez des instituteurs confirmés.

1.1. Le comptage¹

Remarques

Le comptage est un prérequis indispensable pour la notion cardinale de nombre, et est essentiel dans l'apprentissage des mathématiques.

Il favorise le développement des capacités logiques : il est en effet utilisé comme vérification de la validité du raisonnement par l'enfant.

Il indique une connaissance mathématique et est un facteur de développement de l'enfant. C'est donc une connaissance nécessaire mais non suffisante pour le développement des mathématiques.

En 1962, Gréco observait que la conservation de la quantité, basée sur le dénombrement, précède la conservation de la quantité, basée sur la logique.

Remarquons que le comptage n'est pas toujours utilisé par les enfants pour résoudre des problèmes numériques, même vers 5-6 ans.

Evolution

Certains nombres (de 1 à 5) se reconnaissent du premier coup d'oeil ("subitizing"), c'est à dire sans décomposition : ce sont les nombres intuitifs.

L'enfant rencontre des mots-nombres dans une grande variété de situations entre lesquelles il va progressivement établir des liens, d'où l'importance de lui proposer des situations multiples et variées.

D'après Fuson (1988), les mots-nombres varient selon les contextes : cardinal, ordinal, mesure, séquence, comptage, lecture symbolique, contexte non numérique.

Cinq principes de comptage

1. **Ordre stable** : les mots-nombres doivent constituer une séquence stable

Evolution :

- litanie des nombres, pas forcément correcte
- chaîne insécable : l'enfant commence toujours à 1
- chaîne sécable, dénombrable : l'enfant peut commencer à 3 par exemple, peut s'arrêter à un nombre donné
- chaîne bidirectionnelle : l'enfant peut de plus compter à l'envers

2. **Correspondance terme à terme** : chaque élément donné correspond à un seul mot-nombre
Les erreurs rencontrées à ce stade sont des erreurs de coordination mot - pointage ou des erreurs de marquage (éléments recomptés)

3. **Cardinal** : le dernier mot-nombre utilisé dans une séquence de comptage représente le nombre d'éléments de l'ensemble compté.

4. **Abstraction** : l'ensemble sur lequel porte le comptage peut être constitué d'éléments hétérogènes tous pris comme unité.

5. **Non pertinence de l'ordre** : le comptage des éléments peut se faire dans n'importe quel ordre, pour autant que les autres principes soient respectés.

Evolution des réponses à la question "combien en tout ?"

¹ VAN NIEUWENHOVEN C., *Le comptage*, De Boeck, Bruxelles, 1999

- Incompréhension de la tâche et réponse aléatoire
- Répétition de la séquence de comptage (sans référence aux objets) - litanie des nombres
- Recomptage des objets (correspondance terme à terme) sans mot-nombre réponse
- Application de la règle du dernier mot-nombre (même si le comptage est incorrect)
- Réponse cardinale partielle : l'enfant cite le nombre le plus élevé de la séquence de comptage
- Réponse cardinale

Prolongement

Le comptage par un nombre d'unités donné permettra de renforcer la notion de comptage, et est en général utilisé en activité préliminaire à la construction des tables de multiplication, bien que ces dernières nécessitent avant tout la maîtrise du concept de multiplication.

Il est donc important en classe de ne pas se limiter à la procédure de comptage unité par unité, à partir de 1.

1.2. Notion de nombre naturel

La notion de nombre commence à être acquise très tôt par l'enfant ; dès l'école maternelle voire auparavant par les parents y accordant une certaine importance.

Un étudiant de l'école normale les manipule donc depuis un minimum de quinze années. Elle semble donc très naturelle, mais l'est-elle vraiment ?

Les anthropologues visitant les dernières tribus isolées le confirment, les membres de celles-ci ont développé des mots uniquement pour les nombres 1, 2 et parfois 3, très rarement pour 4 et semble-t-il jamais pour 5. Après des siècles d'existence, ces populations n'en ont pas trouvé l'utilité. Seules les civilisations plus avancées ont eu le besoin de développer un système de numération permettant de nommer de grandes quantités.

On peut y voir un indice du fait que la notion de nombre n'est pas naturelle ; ainsi un enfant doit-il apprendre celle-ci auprès d'adultes puisqu'il ne la développera pas par lui-même.

Et qu'en est-il du zéro ?

L'ensemble des nombres naturels noté N est souvent défini en extension : $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Cette définition, si elle a le mérite d'être claire pour ceux qui connaissent déjà ces nombres, est en réalité très mauvaise. Il existe une définition très précise de cet ensemble, mais paradoxalement, il faut être un mathématicien confirmé pour la comprendre. Essayons d'analyser une manière de les expliquer assez proche de ce qui est fait à l'école maternelle.

Considérons deux ensembles d'objets et procédons à une correspondance terme à terme. Si on parvient à apparier tous les objets, on dira qu'il y a une équivalence de quantité (il y a **autant** d'objets dans un ensemble que dans l'autre). Si par contre, après avoir fait le maximum d'appariements possibles, il reste des objets dans un ensemble (mettons le deuxième), il n'y a pas d'équivalence de quantités (il y a **moins** d'objets dans le premier ensemble **que** dans le deuxième ou **plus** d'objets dans le deuxième **que** dans le premier. On peut ainsi ordonner les types d'ensemble par leurs quantités.

La classe des ensembles vides se verra attribuer le nombre 0, celle des singletons le nombre 1, celle des paires le nombre 2, et cætera.

Une propriété essentielle est le fait qu'on peut ranger les classes dans un ordre tel qu'un ensemble passe dans la classe suivante si on lui ajoute un seul élément. C'est la sériation. Ceci permettra d'ordonner les nombres naturels (aspect ordinal du nombre) et de les représenter sur une droite graduée (droite munie d'un sens, d'une origine et d'une unité).

Vocabulaire

Il faut distinguer quantité, nombre, chiffre et veiller à utiliser le terme adéquat.

1. La *quantité* correspond au comptage d'une collection concrète.

Il n'est pas nécessaire d'avoir une conception abstraite pour distinguer une quantité.

2. **Le nombre est une abstraction obtenue, comme caractéristique commune à une classe d'ensembles. Il correspond au comptage abstrait d'une collection.**
3. **Un chiffre est un symbole d'écriture permettant de représenter un nombre.**
Certains nombres s'écrivent à l'aide d'un seul chiffre, d'autres nécessitent l'emploi de plusieurs chiffres.
4. **La numération (écrite) est le code d'écriture des nombres, la façon de noter les nombres.**

On classe les différentes numérations selon le type de code utilisé (voir historique). On parle aussi de numération parlée il s'agit alors de la façon de dire les nombres. Rem: Les numérations écrite et parlée ne concordent pas toujours.

Ex: 78 se dit en France "soixante" dix huit. Alors que par écrit on regroupe dix unités, oralement on en regroupe vingt !

Lors de comparaison de collections apparaîtront également des mots spécifiques : plus que, moins que, autant que (ou pareil dans un premier temps)

L'aspect cardinal

La notion cardinale du nombre est l'aspect "quantité" du nombre.

Exemples : Il y a quatre enfants assis à la table. Chaque enfant reçoit une collation : il y a quatre collations. Il faudra quatre jus pour cette table

L'aspect ordinal

La notion ordinale du nombre est liée à la "position" dans une série.

Exemples : Mercredi est le troisième jour de la semaine. Paul est le premier de la file. (Outils : bande numérique, tableau, droite graduée)

1.3. Conservation du nombre

La conservation de la quantité n'est pas toujours acquise chez les enfants de 1^{ère} année.

Certains enfants diront qu'il y a plus d'objets si on disperse les objets d'un ensemble.

Certains enfants diront qu'il y a plus d'objets dans l'ensemble où les objets sont les plus grands, ou bien là où les objets sont plus espacés. Il faut alors retravailler la correspondance terme à terme et faire manipuler.

Stades de la conservation du nombre (Piaget)

On donne à comparer 8 jetons bleus et 8 jetons rouges. (espacement identique, différent, disposition différente)

- Non-conservation du nombre (jusqu'à 4-5 ans) : l'enfant prétend qu'il y a plus de jetons bleus que de rouges si les jetons occupent plus d'espace, et cela même s'il est capable de compter les jetons de chaque collection.
- Stade intermédiaire : réponse variable : "il y en a plus ... il y en a moins ... c'est la même chose"
- Conservation du nombre ($\pm$ 5 ans) : dans les deux situations, les enfants émettent des jugements stables :
 "Il y a la même chose de bleus et de rouges, on n'en a pas ajouté ni enlevé, on a juste écarté (resserré) les ..." (argument d'identité)
 "Il y a la même chose : on peut remettre les bleus en rangée comme les rouges" (argument de réversibilité)
 "Il y a la même chose, les bleus forment une longue rangée, mais il y a chaque fois plus d'espace entre les jetons." (argument de compensation)

La conservation de la quantité est un préalable indispensable à la construction du nombre.

On peut dire que l'enfant maîtrise le cardinal lorsqu'il reconnaît son invariance numérique.

Autre exemple de test : On demande à l'enfant d'observer la configuration réalisée par deux rangées d'allumettes (même nombre d'allumettes, mais dessin différent : par exemple ligne droite et zig-zag). Ensuite, on lui demande de reproduire cette configuration.

Questions à poser pour aller plus loin :

"Combien y en a-t-il si j'en ajoute 1 (2,3,...); si j'en enlève 1 (2,3,...)" permettant de faire trouver le successeur, le prédécesseur d'un nombre.

Ce type de question permettra à l'enfant de développer progressivement des stratégies de calcul sur de petits nombres (voir opérations).

Exemple d'évolution de la notion

On donne une boîte à alvéoles à remplir, par exemple de jetons (demande les notions de correspondance terme à terme, de transport du nombre).

1. L'enfant fait autant de voyages qu'il y a d'alvéoles (3 ans)
2. L'enfant prend une poignée d'objets
3. L'enfant utilise une structure rythmique (aspect auditif)
4. L'enfant groupe (par exemple par 2) pour transporter et utilise un aspect visuel
5. L'enfant regarde de loin et compte par pointage
6. L'enfant compte avant le transport

On pourrait prolonger l'activité en demandant qu'il reste des alvéoles libres, ou de placer 2 jetons par alvéole...

Quelques démarches d'enfants pouvant être observées¹

- Reconnaissance globale : l'enfant répond directement un nombre vu comme cardinal de la collection.
- Pointage de chaque objet coordonné avec un mot-nombre
- Regroupement des objets dans un certain ordre avant le comptage

Remédiation pour un enfant qui ne conserve pas le nombre

Bien souvent, quand un enfant n'a pas atteint le stade de la conservation du nombre, c'est qu'il ne maîtrise pas l'un des concepts suivants :

- la notion de classement (regrouper les objets d'une collection en sous-groupes selon un critère (par exemple la couleur ou le nombre) en se focalisant sur un seul critère à la fois,
- la notion d'inclusion entre des collections de quantités d'objets de plus en plus grandes
- la notion de correspondance un à un (un mot-nombre, un objet)

1.4. Représentations du nombre

Il est important de varier les modes de représentation des nombres à l'école maternelle et au début de l'école primaire.

L'écriture classique du nombre ne sera qu'une de ces représentations, et sera toujours associée, au cycle 1 (1^{ère} et 2^{ème} maternelle), à une autre représentation du nombre.

Un nombre peut être représenté par une collection d'objets, des doigts, des points (penser aux constellations comme les faces des dés),..., des boîtes à nombres ou collections d'objets, un ou des chiffres.

Un chiffre est un caractère qui permet d'écrire les nombres : il a le même statut que la lettre par rapport au mot. Il y a 10 chiffres permettant d'écrire une infinité de nombres.

Il est important de faire comprendre la différence entre le chiffre, qui n'est qu'une représentation, un outil, et le nombre, concept abstrait à l'aide de nombreux exemples :

- représentations différentes d'un calcul élémentaire (exemple $3 + 2 = 5$),
- analogie avec les lettres et les mots en français, ...

¹ GAUDREAU A, "Echec en maths ?", Hurtebise, Québec, 2003 p. 75

1.5. Décompositions d'un nombre

La notion de décomposition d'un nombre, réalisée à partir de manipulations concrètes, et ses nombreuses représentations : diagrammes, arbres, maisons permettront d'une part de se faire une sorte de banque d'images mentales d'un nombre donné, et d'autre part d'aborder les premiers calculs plus aisément, grâce à des images concrètes.

1.6. Prélude à la numération : groupement, échange

Du troc, des groupements et des échanges peuvent se faire dès la maternelle.

Il existe de nombreux groupements dans la vie courante tels que : mains et doigts (base cinq), semaines et jours (base sept), ...

Le groupement par dix, clé de notre numération, est abordée en profondeur dès la 1^{ère} primaire (10 unités = 1 dizaine) et reprise après.

La notion d'échange "x contre 1 de l'ordre juste supérieur" permet de mettre en place la numération de position et l'écriture du nombre en chiffres.

1.7. Aspects méthodologiques

A l'école primaire (1^{er} degré), on étudie les nombres naturels un par un en travaillant les différents aspects :

1. correspondance terme à terme.
On montre par des manipulations que 2 quantités sont les mêmes.
Ex: faire dresser une table concrétise une bijection entre l'ensemble des assiettes et l'ensemble des fourchettes...
2. notion cardinale du nombre
On présente et on manipule des ensembles variés dont le cardinal correspond au nombre étudié.
3. notion ordinale du nombre
On situe le nombre par rapport à ses voisins, on le place dans la ribambelle des naturels.
4. décompositions du nombre
On pratique de nombreuses manipulations conduisant aux différentes décompositions du nombre (maison, toboggan, partages...).
5. échanges.
On échange un jeton contre 3 boutons, une pièce de 20 francs contre vingt pièces d'un franc...
6. lecture et écriture du nombre.
On apprend aux enfants l'écriture des différents chiffres à l'occasion de l'étude des nombres de un à neuf. Le rôle de la position des chiffres est abordé à partir de dix. C'est seulement ici que la nécessité du zéro apparaît, il est donc inutile de parler de zéro prématurément !



Remarques importantes

- Il ne faut pas confondre maîtrise du chiffre et maîtrise du nombre. La maîtrise précoce de l'écriture des chiffres par des enfants de 5 ou 6 ans est souvent dangereuse parce qu'elle incite l'enseignant à aller trop vite, notamment au niveau de la représentation d'opérations du style $2 + 3 = 5$.
- Ce n'est pas parce qu'un enfant peut écrire les chiffres ou parce qu'il peut compter, c'est à dire reproduire de mémoire la suite des chiffres qu'il maîtrise la notion de nombre. Un enfant a la maîtrise des petits nombres lorsqu'il en a une perception globale, c'est à dire lorsqu'il est capable de les identifier à travers une structure bien précise sans avoir recours au comptage.
- Un enfant a la maîtrise des grands nombres lorsqu'il est capable de les identifier à travers leur structuration en schème ou leur décomposition en nombres eux-mêmes structurés
- La seule approche du nombre zéro à travers des collections vides est insuffisante. Elle doit être complétée par de nombreuses opérations qui mettent en jeu zéro dans des additions, soustractions... Zéro ne prendra son sens qu'une fois abordée la notion de dizaine et de numération de position.
- Zéro représente une collection dans laquelle il n'y a rien, mais zéro n'est pas rien. Introduire zéro comme « rien » peut avoir des conséquences perverses dans l'esprit des enfants. Par exemple l'enfant pourrait avoir tendance à dire que $5 \times 0 = 5$. En effet multiplier par zéro sera pour lui multiplier par rien, donc ne rien faire – ne pas le multiplier - et donc le laisser inchangé.

Quelques représentations des nombres naturels (1^{er} degré E.P.)

- Schèmes muraux, points du dés (constellations), boîtes à nombres, ... (lié à l'aspect cardinal)
- Bande numérique
Cette représentation permettra d'insister sur l'aspect ordinal des nombres.
Type d'exercices : comptages, comptages par, comparaisons ($<$, $>$ ¹...)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Grille ou tableau
Cette représentation permettra d'insister sur la notion de dizaine

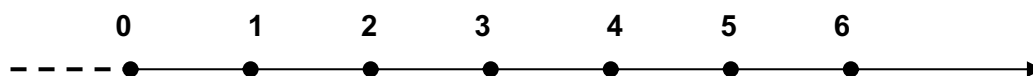
¹ Ces symboles ne peuvent se placer qu'entre des nombres.

Type d'exercices : comptages, comptages par, ajout de nouveaux nombres, encadrements...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

Remarquons que le zéro est une caractéristique de notre système de numération, et ne prend tout son sens qu'à partir de dix, qui est notre base de numération.

- Doigts de la main (regroupement par 5 particulièrement intéressant)
- Abaque
Placer des nombres dans un abaque permet d'insister sur la notion de base 10.
- Droite graduée
Cette représentation prépare à l'introduction d'autres nombres : fractionnaires, décimaux.
Utilisation : Représentation de grands nombres, encadrements, ...



L'ordre « est plus petit » (« est plus grand ») se visualise bien par « est avant » (« est après »)

Même si la partie à gauche n'est pas utilisée dès l'introduction de la droite, il est bon d'y faire figurer des pointillés.

2. LA NUMERATION

2.1. Les différents types de numération

Par le passé, chaque civilisation a dû développer un système de numération, voire plusieurs. Le but de ce cours n'est certainement pas de tous les développer, mais d'en regarder quelques-uns afin de bien voir les avantages de celui qu'on utilise aujourd'hui et qu'on ne voit pas nécessairement tellement ils nous semblent naturels.

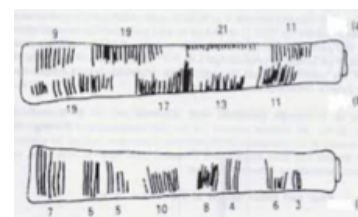
Un système de numération doit être fait pour que la comparaison des nombres soit facile et pour que leur écriture soit simple et unique. Il faut aussi que la quantité de signes utilisés ne soit pas trop importante.

Il existe deux grands types de systèmes de numération écrite. Ils utilisent différentes bases (une base est le nombre d'unités d'un certain rang nécessaire pour fabriquer une unité d'un rang immédiatement supérieur) : on trouve principalement des systèmes en base 10, 20, 60.

Les numérations de type additif

Le nombre est écrit à l'aide d'un ensemble fini de signes. Pour le connaître, il suffit d'additionner la valeur des différents signes le composant. Le symbole zéro n'existe pas.

Les numérations additives ont été créées les premières : par l'homme des cavernes, pour compter les animaux à l'aide d'entailles sur un os (Cro-magnon, de -35 000 à -20 000), par les Mayas (comptage sur les doigts et les orteils), par les Sumériens vers -3400 (boulettes d'argiles pour représenter 1, 10, 100, 300, 3000...), les Egyptiens vers -3000 (signes différents pour 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000). Plus tard, les Grecs, les Romains et les Hébreux prendront des lettres de l'alphabet comme chiffres.



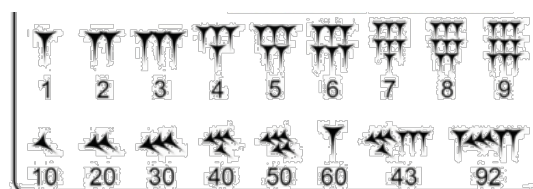
Actuellement, il existe encore des numérations écrites de type additif et multiplicatif, c'est le cas de la numération sinojaponaise, c'est pourquoi les Chinois et les Japonais utilisent des bouliers.

Les numérations de type positionnel

On écrit le nombre avec un ensemble fini de chiffres. Deux nombres composés des mêmes chiffres sont différents si la place de ces chiffres n'est pas la même. La position du chiffre indique le groupe de la puissance de la base qu'il représente.

Le symbole zéro est nécessaire pour indiquer qu'un groupement de la base n'est pas utilisé.

La première numération positionnelle connue fut celle des Babyloniens (-2000). Ils utilisaient la base 60. Au début, ils indiquaient par une place vide qu'un ordre n'était pas utilisé, ce qui posait des problèmes de lecture; ils inventèrent alors, au 4^e siècle avant notre ère, le premier zéro de l'humanité. Il n'est pas encore conçu comme un nombre mais sert simplement à indiquer qu'une place est vide.



Les Chinois ont également utilisé un principe de position peu avant le début de notre ère, mais le zéro n'est apparu chez eux qu'au 8^e siècle.

Les Mayas fabriquent un système positionnel de base 20 entre le 4^e et le 9^e siècle.

Enfin, au 5^e siècle, en Inde, on conçoit un système positionnel décimal avec dix chiffres et cette fois un zéro. La propagation de ce système se fait d'abord chez les Arabes qui nous le transmettent au 10^e siècle. En arabe, le mot sifr signifie zéro : c'est l'origine du mot chiffre.

Lecture :

- CERQUETTI-ABERKANE, F. *Histoires de comptes*, Editions Epigone, Paris, 1987.
- IFRAH Georges, *Histoire universelle des chiffres*, Laffont, Paris, 1994

2.2. Etude de quelques systèmes de numération

Numération égyptienne

La numération égyptienne utilise des hiéroglyphes.

1	10	100	 fleur de Lotus	 index	 tétard	 dieu
1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

Exemples : Ecrire 6060 bovins, 1422 chèvres, 1120 000 prisonniers à l'aide des symboles.

La numération égyptienne est de type additif et de base 10. Elle utilise bien évidemment des hiéroglyphes. Une écriture hiératique existe en parallèle pour les classes inférieures indignes des hiéroglyphes.

Exercices

- Comparer les nombres suivants :
 - $C \cap I$ et $I \cap C$
 - 153 et 351 Quelle conclusion peut-on tirer de ceci ?
- Ecrire le nombre qui vient après $\cap \cap \cap IIII$
- Ecrire le nombre qui vient avant $\cap \cap \cap$
- Ecrire un nombre inférieur à 1000 à l'aide d'au moins dix chiffres égyptiens
- Ecrire un nombre entre 100 et 10 000 à l'aide de deux chiffres égyptiens
- Quel est le résultat de $\cap \cap \cap IIII$ multiplié par 10 ? par 4 ?

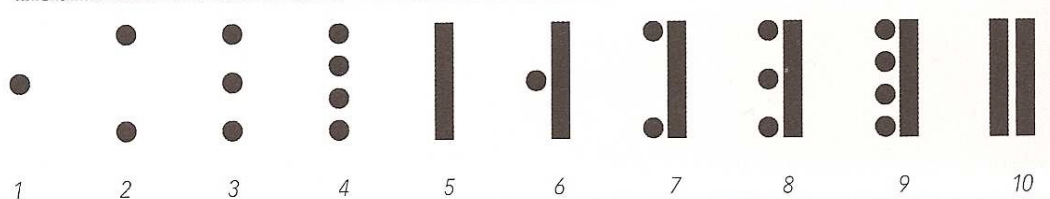
Remarques :

- Un petit nombre peut avoir une longue écriture
- Il manque des chiffres pour écrire de très grands nombres
- La position des chiffres n'a pas d'importance
- Les opérations ne sont pas très commodes à effectuer.

Numération maya

Si la première numération de position aussi performante que la nôtre (voire plus performante) est babylonienne et est vieille de 4000 ans, il est plus facile de voir celle des Mayas. Elle est donc de position, mais aussi de base 20. Elle se « lit » **de haut en bas**.

Les chiffres de 1 à 9



Une numération en base 20

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		(x20)	(x400)	(x467)	(x1449)						
	20	400	467	1449							

Exercices :

- Ecris les nombres 12, 36, 124, 1236, 30005, 1998 et 4999 en numération maya.
- Effectue en calcul et écris l'addition de ces deux derniers nombres.
- Quel est le résultat de la multiplication de ce dernier nombre par 10? par 4? par 20? par 5?
- Est-il plus facile de multiplier par 10 ou par 20? Pourquoi?

Numération romaine

Les chiffres romains sont :

I	V	X	L	C	D	M
un	cinq	dix	cinquante	cent	cinq cents	mille

La base est 10, le système est additif, comme chez les Egyptiens.

L'idée d'écrire IV au lieu de IIII, IX au lieu de VIIII est apparue seulement au Moyen-Age.

Exercices

1. Ecrire : a) 124 b) 1236 c) 30005 d) 1998 e) 4999
2. Ecrire le nombre qui vient après MCXXXVIII
3. Ecrire le nombre qui vient avant MDCX
4. Ecrire un nombre inférieur à vingt et qui s'écrit à l'aide de 4 chiffres romains
5. Ecrire un nombre supérieur à mille et qui s'écrit avec 2 chiffres romains
6. Que vaut CCCLXVII multiplié par dix ? par quatre ?

Aussi peu pratique soit-elle (voir ses inconvénients), elle est encore nécessaire aujourd'hui puisque utilisée sur un grand nombre de documents et monuments historiques. Elle fait partie pour cette raison de la matière de primaire.

Evolution vers notre numération

Comme souvent en mathématiques, les noms sont trompeurs. Les chiffres que nous appelons arabes sont en réalité indiens. Certains datent de la civilisation Brahmi au troisième siècle avant Jésus-Christ. Les Arabes, lorsqu'ils ont conquis une partie de l'Inde, faisaient partie des rares conquérants à avoir l'intelligence de lire les livres des autres plutôt que de les brûler. Devant les grandes performances de ce système, ils l'adoptèrent. Au treizième siècle, Léonard de Pise (aussi appelé Fibonacci) les découvre au Maghreb et de retour en Toscane, il publie le "Liber Abacci", un ouvrage montrant tous les avantages pratiques qu'on peut tirer de cette notation. Lentement les réticences aux chiffres trouvés chez les Arabes disparaîtront et leur usage deviendra universel. Si ceux-ci nous sont maintenant familiers, on oublie rapidement les difficultés très nombreuses que représente l'apprentissage de ce système de numération pour les enfants. Celui-ci est long et délicat et certains phénomènes semblent inexplicables : — Pourquoi après 9 n'invente-t-on pas un nouveau chiffre ? On écrit un nombre à deux chiffres apparaissant déjà plus tôt dans la liste. — Pourquoi, jusqu'à 16, chaque nombre possède un nom qui lui est propre, mais à partir de 17, on utilise des noms déjà employés. Par contre, 20 et 30 ont des nouveaux noms, mais pas 80. — Pourquoi vingt-et-un, mais pas vingt-et-deux ? — Pourquoi vingt-et-un, mais pas cent-et-un ? — Pourquoi certains disent quinze-cents, mais pas vingt-cinq-cents ? — Pourquoi ne prononce-t-on jamais le zéro ?

D'autres questions sont possibles ; cette liste est loin d'être exhaustive. L'enfant passera lentement de la situation où il se pose toutes ces questions à celle où il ne s'en pose plus aucune. Mais cela ne se fait évidemment pas sur un laps de temps très court. C'est pourquoi il est impératif de se rappeler toutes les petites difficultés qui parsèment un apprentissage d'un domaine qui ne nous en pose plus. Nous utilisons un système de numération de base 10 s'écrivant de droite à gauche. Il a été adopté quasiment sur la Terre entière grâce à ses nombreux avantages. On aurait pu tout aussi bien adopter celui des Mayas ou des Babyloniens.

Evolution de la graphie des chiffres

Hindou (Brahmi) : environ 300 ans avant notre ère

— = ≡ ≠ ∫ ∪ ∩ ∪ ∩ ∩

Hindou (Gwalior) : vers 876

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Hindou (Devenagari) au XI^e siècle

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Arabe occidental (Ghobar) au XI^e siècle

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

Arabe oriental au XI^e siècle

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Numération européenne, pendant la plus grande partie du XVI^e siècle

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Numération européenne au XVI^e siècle

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Chiffres en usage au XX^e siècle

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Autres systèmes de numération :

- Les quipus chez les Incas, également en base dix (la valeur dépend de la position sur la corde)
- Les Mundurucus (Amazonie, est du Brésil) ne comptent que jusqu'à 5

Parfois, les mots utilisés sont soit liés aux corps (mains, pieds, doigts, pouce, poignet, ...) soit à l'environnement (1 pour la terre, 2 pour les jumeaux, 4 pour les points cardinaux, ...)

Remarque

Avec ces chiffres, il est possible d'écrire une infinité de nombres.

Ce n'est possible que dans un système de position et grâce à l'invention d'un signe pour zéro.

Bizarrement, zéro est à l'origine du mot "chiffre" : en effet, en arabe, "rien" se dit "as-sifr" ou "cifra".

Notre système décimal fonctionne comme un alignement horizontal de cases qu'on commence à remplir par la droite ; On décide de ne jamais placer plus que 9 dans une case. Pour que cela soit possible, dix dans une case équivalant à 1 dans la case voisine de gauche.

Le système binaire

Ce système a été conçu par Leibnitz (1646-1716) et ne connaît que deux signes 1 et 0.

Il est utilisé pour les premières machines à calculer (Pascal), et par la suite en informatique, puisque la traduction en signaux électriques d'un nombre binaire est très souple.

Notre système de numération parlée ou orale

Notre système de numération parlée est à la fois additif et multiplicatif.

Par exemple 347 se lit "trois (fois) cent (plus) quarante (càd 4 x 10) (plus) sept.

Il possède de nombreuses irrégularités :

◇ un ... seize : cette partie de la chaîne numérique doit être mémorisée

- ◇ vingt, vingt et un, vingt-deux,...
- ◇ trente, trente et un, trente-deux,...
- ◇ quatre-vingts, quatre-vingt-un, quatre-vingt-deux combinent plusieurs difficultés
- ◇ cent, cent un ou cent et un , cent deux,...
- ◇ deux cents, deux cent un,...
- ◇ mille, deux mille, deux mille un

Exercices

1. Comparer notre système de numération oral et écrit.
2. Expliquer la différence entre chiffre et nombre.
3. Expliquer ce qu'est la conservation du nombre
4. Quelles sont les différentes représentations du nombre que l'on peut rencontrer à l'école maternelle ? Illustrer chaque réponse par un exemple concret.
5. Prendre 13 bandelettes.
"Comment écrire 12 ?"
"Monter où est le 1, le 2 avec les bandelettes."
Pourquoi ça s'écrit 12 ? On n'entend ni le 1 ni le 2."

Conclusion

Comparaison entre un système additif et notre système de numération positionnel

Système additif (par ex. romain, égyptien)	Notre système de numération
Le passage d'un symbole à l'autre ne se fait pas toujours par des groupements égaux .	La base 10 indique que le passage à une unité de rang directement supérieur se fait toujours par groupement de 10 unités
Des quantités différentes sont exprimées à l'aide de symboles différents. Il n'y a pas de symbole pour les grands nombres.	Dix chiffres suffisent à représenter tous les nombres.
Pour connaître le nombre, il faut additionner la valeur des différents signes qui le composent	A chaque position correspond une puissance de la base (10 pour notre système de numération) La valeur que représente un chiffre dépend de sa position dans le nombre (donnée dans notre système par la classe et le rang).
Il n'y a pas de zéro	Le zéro sert à indiquer qu'une unité d'un rang n'est pas utilisée
Les opérations sont vite complexes (d'où l'apparition de bouliers)	Techniques d'opérations plus simples (cf. calcul écrit).

2.3. Bases

Pour des raisons d'économie de noms et de symboles, les systèmes les plus efficaces sont ceux qui reposent sur des regroupements en un certain nombre d'éléments, toujours le même. Ce nombre est appelé base de numération.

Le mode de regroupement où chaque chiffre prend une valeur différente selon la place qu'il occupe s'appelle système de numération de position (exemples : bases 2, 10, 16) : c'est un ensemble de signes et de règles qui permettent d'écrire et de nommer les nombres.

Principes théoriques de la numération de position

1. Choisir une base.
 Une *base* est la quantité que l'on choisit pour faire des regroupements.
 Une fois la base choisie, tous les regroupements se font selon cette quantité et sont obligatoires.
2. Choisir des chiffres
 Il faut attribuer un caractère (chiffre) à chaque quantité strictement inférieure à la base

3. Définir le rôle de la position du chiffre.

La position ou rang d'un chiffre influence sa valeur. Chaque unité d'un rang vaut un nombre (égal à la base) d'unités du rang précédent.

Par exemple, dans notre système décimal, le 3 de 32 figure au 2^e rang et désigne 3 dizaines ou 3 fois dix unités tandis que le 3 de 25 302 figure au 3^e rang et désigne 3 centaines ou 3 fois dix dizaines.

4. Introduire le zéro.

Le zéro sera d'abord un simple chiffre servant à indiquer une position en remplissant les rangs vides. Ensuite, le zéro deviendra un nombre à part entière associé à la classe comprenant l'ensemble vide. On pourra dès lors opérer sur zéro au même titre que sur les autres nombres.

Ce système ainsi conçu permet de représenter n'importe quel nombre aussi grand soit-il et d'effectuer des calculs sans trop de difficultés.

Seuls peuvent varier le choix de la base ou celui des chiffres.

Ces deux changements ne modifient en rien le principe mais nécessitent d'autres habitudes (cf. connaissance des tables) et modifient certaines propriétés liées précisément aux chiffres et/ou à la base (cf. caractères de divisibilité).

Plusieurs bases sont utilisées aujourd'hui. En informatique, on utilise le système binaire (base 2) inventé par Gottfried Leibniz (1646-1716) et déjà utilisé dans la calculatrice de Blaise Pascal (1623-1662). En théorie des codes, on utilise le système ternaire (base 3), toujours en informatique l'octal (base 8) et l'hexadécimal (base 16), tous les jours le décimal et pour lire l'heure, le sexagésimal (base 60).

Terminologie du système décimal (depuis 1961)

En Belgique, depuis 1961, les choses ont été bien définies. Dans un nombre, les chiffres occupent un rang (la position à partir de la droite et appartient à une classe (un groupement de trois chiffres de la forme centaine-dizaine-unité). Ces classes se nomment classes des unités, milliers, millions, milliards, billions, billiards, et cætera. Elles représentent des puissances de 10.

Classe des milliards			Classe des millions			Classe des mille			Classe des unités			
C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U	
12 ^e	11 ^e	10 ^e	9 ^e	8 ^e	7 ^e	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	2 ^e	1 ^{er}	Ordre du rang
10 ¹¹	10 ¹⁰	10 ⁹	10 ⁸	10 ⁷	10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	10 ²	10 ¹	10 ⁰	Valeur du rang

$$10^6 = 1 \text{ million}$$

$$10^9 = 1 \text{ milliard}$$

$$10^{12} = 1 \text{ billion}$$

$$10^{15} = 1 \text{ billiard}$$

$$10^{18} = 1 \text{ trillion}$$

$$10^{21} = 1 \text{ trilliard}$$

$$10^{24} = 1 \text{ quadrillion....}$$

$$10^{6n} = 1 \text{ « n » illion}$$

$$10^{6n+3} = 1 \text{ « n » illiard}$$

Remarque :

Parfois, on ne regroupe pas les chiffres 3 par 3 :

Par exemple 1998 peut se lire « dix-neuf cent nonante huit »

Classe des Milliers			Classe des Unités		
CM	DM	UM	C	D	U

Exercices de synthèse et réflexion

Répondre pour chacun des systèmes binaires (base deux), ternaire (base trois), octal (base huit), décimal, hexadécimal (base seize) et sexagésimal (base soixante) et justifier.

- De combien de chiffres doit-on disposer ?
- Quel est l'effet des modifications d'écriture suivantes ?
 - écrire un zéro à gauche du nombre ?
 - écrire un zéro à droite du nombre ?
 - effacer un zéro à gauche du nombre ?
 - effacer un zéro à droite du nombre ?
- Quelle modification doit-on opérer dans l'écriture d'un nombre si l'on désire :
 - le multiplier par sa base ?
 - le diviser par sa base

4. Quel est l'intérêt de faire écrire en lettres de grands nombres (exemple s: le nombre d'habitants de la Belgique, le nombre d'habitants de la planète) ?
5. Quel est l'intérêt d'encadrer par des unités de rangs différents (unités, centaines, dizaines de mille ...) ?

2.4. Exercices (particulièrement conseillés !)

1. Quel est le plus grand nombre à trois chiffres en base trois ? En base 10 ?
2. Quel est le plus petit nombre à quatre chiffres en base cinq ? En base 10 ?
3. $(244)_{\text{cinq}} = (x)_{\text{dix}}$ Que vaut x ?
4. Dans quelle base $(51)_{\text{dix}}$ s'écrit-il 303 ?
5. Dans quelle base $(182)_{\text{dix}}$ s'écrit-il 502 ?
6. Dans quelle base peut-on écrire $3 + 2 = 11$?
7. Dans quelle base peut-on écrire $4 + 3 + 4 = 21$?
8. Dans quelle base peut-on écrire $(3 + 3 + 2) \cdot 2 = 100$?
9. Démontrer que dans toutes les bases supérieures à deux, on a
 - a) $12 \cdot 10 = 120$
 - b) $12 \cdot 100 = 1200$
 - c) $(101)^2 = 10201$
 - d) $100^2 = 10\,000$
10. $(x)_{\text{huit}} = (1101)_{\text{deux}}$ Que vaut x ?
11. Calculer la somme $202212 + 121221$ en base
 - a) cinq
 - b) quatre
 - c) trois

Exercices supplémentaires

1. Ecrire : a) sept en base trois b) dix en base trois
2. Compléter :
 - a) $(70)_{\text{dix}} = (\quad)_{\text{vingt}}$
 - b) $(21)_{\text{trois}} = (\quad)_{\text{dix}}$
 - c) $(14)_{\text{cinq}} = (\quad)_{\text{dix}}$
 - d) $(10)_{\text{sept}} = (\quad)_{\text{dix}}$
 - e) $(100)_{\text{douze}} = (\quad)_{\text{dix}}$
 - f) $(127)_{\text{huit}} = (\quad)_{\text{cinq}}$
 - g) $(1204)_{\text{cinq}} = (\quad)_{\text{neuf}}$
 - h) $(5349)_{\text{dix}} = (\quad)_{\text{huit}}$
 - i) $(5AB9)_{\text{douze}} = (\quad)_{\text{dix}}$
3. Ecrire les quantités proposées dans la base indiquée :
 - a) vingt-cinq en base deux
 - b) vingt-cinq en base trois
 - c) quatre-vingt-huit en base onze
 - d) soixante-quatre en base seize
 - e) trois mille deux cent vingt et un en base vingt
4. Convertir trois cents en a) base trente b) base onze
5. Convertir deux cents en a) base cinq b) base vingt
6. Quel est, en base 10, le plus grand nombre à quatre chiffres dans la base deux ?
7. Quel est, en base 10, le plus petit nombre à cinq chiffres dans la base deux ?
8. En utilisant cinq fois le chiffre 1 et trois fois le chiffre 0, écrire
 - a) le plus grand nombre en base deux
 - b) le plus grand nombre en base 10
 - c) le plus petit nombre en base deux
 - d) le plus petit nombre en base 10
9. En lisant les nombres suivants, dites pour chacun :
 - a) quelle peut être la base
 - b) quelles peuvent être les quantités exprimées
 Nombres : 7 ; 10 ; 23 ; 10101
10. Dans quelle(s) base(s) peut-on écrire $200-199 \neq 1$?
11. Dans quelle(s) base(s) la quantité cent s'écrit-elle par un nombre à deux chiffres ?
12. Dans quelle(s) base(s) la quantité vingt s'écrit-elle par un nombre à deux chiffres, celui de droite étant 2 ?

13. Dans quelle(s) base(s) la quantité vingt s'écrit-elle par un nombre à deux chiffres, celui de gauche étant 2 ?

2.5. Aspects méthodologiques

La compréhension profonde des principes d'un système de numération de position s'appuie sur de nombreuses manipulations. Chaque enfant doit disposer de son matériel.

Il faut pratiquer à des échanges hors et dans l'abaque à l'aide de jetons, perles, bouchons, Une façon de lier la manipulation dans l'abaque à l'écriture du nombre est de passer par le remplacement des jetons par des chiffres écrits dans les colonnes de l'abaque.

Pour l'enfant qui découvre les principes, la base "dix" n'est pas plus commode à utiliser qu'une autre base.

Utilité de l'utilisation de bases différentes¹

L'étude de la numération de position dans différentes bases a pour but de conduire à la découverte des conventions qui régissent notre système décimal.

Pour l'enfant, les avantages de cette étude sont :

- * qu'il domine mieux la numération décimale parce qu'il en comprend la construction grâce au travail exécuté dans d'autres bases;
- * qu'il reste attentif à la valeur positionnelle de chaque chiffre dans l'écriture d'un nombre;
- * qu'il peut écrire très tôt des nombres de plusieurs chiffres et comprendre la signification de cette écriture en manipulant une collection restreinte d'objets;
- * qu'il comprend les opérations en découvrant que la démarche est la même quelle que soit la base choisie.

Quelques matériels

Résumé des caractéristiques de différents matériels², allant du plus concret au plus abstrait.

1. Les matériels où chaque unité reste visible

Dans la dizaine que l'on constitue par regroupement, chacune des unités reste présente. Seul un lien (élastique) ou un contenant (sachet) change l'appellation, et l'on peut toujours, à la seconde, reprendre la position initiale, par exemple en ôtant l'élastique, pour retrouver la première appellation.

Exemples : sacs de marrons ou de jetons ou de capsules; pailles ou cure-dents et élastiques,...

2. Les matériels où les rapports de grandeur sont respectés

Comparativement au premier cas, on effectue une opération supplémentaire : l'échange qui fait disparaître le "un" initial dans un tout, la barre. Même si celle-ci est graduée par des encoches, le "un" n'est plus celui de tout à l'heure et le retour en arrière réclame une nouvelle opération : l'échange inverse, par mise en parallèle du 1 "dix" avec 10 "uns".

Exemples : réglettes Cuisenaire, bandes de papier, ...

3. Les matériels où la valeur numérique est indiquée

C'est la principe même de l'argent. Les cinq pièces de 1 F n'apparaissent plus dans la pièce de 5 F, mais le 5 est inscrit.

C'est donc un pas vers l'abstraction (difficilement réalisable à l'école maternelle).

Exemples : monnaie (factice ou réelle), jetons marqués

4. Les matériels dont la couleur change selon le groupement

C'est un pas supplémentaire vers l'abstraction.

Exemples : capsules de différentes couleurs, "trocs" successifs...

¹ PERRET J.F., *Comprendre l'écriture des nombres*, Ed Peter Lang, Berne, 1985

² CHARNAY R. et MANTE M., *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles - tome 2*, Hatier, Paris, 1996 p.88

5. Les matériels où seule importe la position

Il s'agit des abaques et des bouliers.

Pour les abaques, le classement s'ordonne comme pour l'écriture droite-gauche.

Le danger réside toujours dans le fait que, les "uns" ayant disparu, les enfants fassent fonctionner le système sans savoir ce qu'il recouvre.

Un exercice classique consiste à encadrer un nombre entre deux unités successives d'un même rang, à varier les désignations d'un même nombre (exemple : 327 ou 32 dizaines et 7 unités).

Quelques activités permettant d'introduire la notion¹ de base

La compréhension profonde des principes d'un système de numération s'appuie sur de nombreuses manipulations. Chaque enfant doit disposer de son matériel.

Il faut pratiquer des échanges hors et dans l'abaque à l'aide de jetons, perles, bouchons, ...

Une façon de lier la manipulation dans l'abaque à l'écriture du nombre est de passer par le remplacement des jetons par des chiffres écrits dans les colonnes de l'abaque.

Pour l'enfant qui découvre les principes, la base "dix" n'est pas plus commode à utiliser qu'une autre base.

C'est en manipulant d'autres systèmes construits selon le même principe de groupements et de positionnements que l'enfant pourra abstraire la logique de construction, c'est-à-dire qu'il pourra comprendre le mécanisme d'un système de numération de position quel qu'il soit.

Ce type d'activité pourra s'organiser dès la première primaire à l'aide de jeux d'échange (magasin, récompenses) en utilisant des objets, un matériel multibase du type Cuisenaire, des jetons ou capsules, des pailles ou allumettes, l'argent (lié à la base 10)...

On peut aussi exprimer les nombres en mains et doigts (base cinq), en boîtes et en oeufs (base six)... Le type d'exercices ressemble à ceux donnés dans les grandeurs (comparer 1 main et 4 doigts, convertir 2 mains en doigts, écrire 13 doigts en mains et en doigts...).

En effet, les difficultés sont les mêmes pour comprendre, par exemple que 3 m = 300 cm.

Pour mieux visualiser l'écriture du nombre, on peut ranger celle-ci dans un abaque, ou tableau des puissances.

Exercice : Ecrire vingt puis cinquante-neuf en base 2, 3, 5, 8, 12, 16

Jeux d'échange

A l'école maternelle, au magasin, voici un exemple de progression rencontrée :

- * Le troc "marchandage" : "Si tu me donnes un bonbon, je te donnerai un biscuit".
- * Le troc d'une chose contre une autre chose :
A : "Je veux le vélo." B : "D'accord, mais tu me donnes ta poupée"
- * Le troc d'une chose contre une monnaie non quantifiée "Ca coûte de l'argent"
- * L'échange quantifiable mais encore non numérique : "C'est plus cher, moins cher,..."
La quantité d'argent s'évalue en volume occupé dans la main ou dans le porte-monnaie.
- * Le jeu numérique non régi par des lois : Exemple : une botte de carottes pour deux salades
- * Le jeu numérique socialisé. La monnaie est quantifiable, la valeur est fixée.
La monnaie peut être un seul type de pièce ou plusieurs avec un codage progressif (voir les différents matériels).

Activité 1

L'institutrice présente aux enfants un panneau partagé en trois colonnes.

Ces colonnes représentent la maison des cubes, la maison des cuillères et la maison des jetons.

¹ Activités réalisées au CP (1ère primaire) lors d'une formation du GEPALM à Lille en 98

Chaque enfant reçoit une feuille (3 colonnes, une quinzaine de lignes).

Après quelques exercices oraux, les enfants doivent écrire le nombre d'objets dans chaque maison (exemple 1-2-2).

Ensuite, l'institutrice ajoute un ou deux objets et demande le résultat et sa justification (on a ajouté...), d'abord en montrant ce qu'elle fait, puis en cachant le panneau.

Elle retire ensuite certains éléments.

Enfin, les enfants "racontent l'histoire" à l'aide de leur feuille.

Activité 2

Matériel : une feuille en carton partagée en trois lignes, des cubes, des pots, des sacs en plastique.

Les enfants ont devant eux le carton, tout le reste étant plus loin ("au magasin").

Les trois lignes permettent de distinguer trois "maisons" (cubes au bas de la feuille, pots au milieu, sacs en haut).

La règle donnée est : lorsque l'institutrice tape dans les mains, on ajoute un cube dans la "maison des cubes"; si l'enfant a 4 cubes, il doit dire "stop", les mettre dans un pot, retourner le pot et le placer dans la "maison des pots"; s'il a 4 pots, il doit dire "stop", les mettre dans un sac et le placer dans la "maison des sacs".

Le jeu se déroule jusqu'au premier sac : l'institutrice fait alors comparer 1 sac, 4 pots, 16 cubes.

Activité 3

Même style d'activité que la 2e, mais en base 3.

Les enfants reçoivent une feuille à 3 lignes et une quinzaine de colonnes.

Règle supplémentaire : on écrit verticalement, 0 s'écrit ♥, 1 s'écrit Δ et 2 s'écrit ♣.

Même déroulement avec écriture de chaque résultat et explication des différents symboles ("mettre un doigt sur Δ, l'autre sur ce qu'il représente").

Arrêt à Δ Δ Δ en demandant "Combien de cubes en tout ?"

Activité 4

Activité similaire, mais la feuille de carton est coupée en 3 lignes, et les enfants reçoivent une feuille quadrillée partagée en 3 colonnes (1 - 10 ...).

Matériel : allumettes simples, paquets de 10 allumettes reliées par un élastique.

Règle supplémentaire : il faut commencer à droite.

Déroulement similaire aux activités précédentes : on ajoute 1, ...on ajoute 3, on ajoute 10 (allumettes séparées ou reliées)... Expliquer le rôle d'un chiffre....Ceci jusqu'à 100.

Comptage d'un grand nombre d'objets (5/8)

Ce type d'activité peut permettre une évaluation aisée du niveau des enfants, et peut être différenciée (nombres abordés différents); de plus, elle peut aisément être introduite dans un cadre fonctionnel.

- Certains enfants comptent objet par objet, ce qui pose le problème de la vérification en cas d'erreur.
- L'idée suivante est de compter sans se tromper, en groupant les objets (par 5, par 10, par 20)
- Ensuite, on peut réaliser le même type d'activité sur papier comportant des dessins de triangles, des points,...; soit on demande un regroupement visuel (on ne fait noter que la réponse), soit en permettant de grouper les dessins (ex. par 10)

Jeu de la banquière¹

Matériel : un dé; des jetons jaunes, rouges, verts, bleus

Règles du jeu :

Chaque enfant à son tour lance le dé et reçoit autant de jetons jaunes de la banquière qu'il y a de points sur le dé. Les pions jaunes peuvent être échangés : un pion rouge vaut 5 jaunes, un pion vert vaut 5 rouges et un pion bleu vaut 5 verts

Déroulement

¹ DESMARETS A., JADIN B., ROUCHE N., SARTIAUX P., *Oh, moi les maths ...*, Talus d'approche, Bruxelles, 1997, p. 25 à 30

Au début, chaque joueur amasse les jetons jaunes, mais à un moment, le jeu doit s'arrêter car il n'y a plus de jetons jaunes à la banque, et il faut donc faire des échanges : par exemple, 12 jaunes

Le jeu continue, éventuellement avec 2 dés (pour avoir plus d'échanges).

Une équipe obtient 8 et propose "On donne 2 jaunes et la banquière nous donne 2 rouges"

Plus tard, un enfant qui a fait 9 propose : "Tu me donnes 1 vert, 1 rouge et 2 jaunes et je te donne 3 jaunes et 4 rouges" Est-ce valable ?

A la fin du jeu, l'institutrice demande de comparer les collections.

Prolongement : passage à l'abstraction : on travaille sans jetons, avec une feuille sur laquelle on note les nombres obtenus et les jetons, ce qui permet à tout moment de comparer les équipes.

Quatre étapes pour le passage 10 unités = une dizaine

Contenu : comparer une dizaine et 10 unités, expliquer le "1" et le "0" de 10, expliquer la règle (base 10)

1. Le dire de deux façons différentes (1 dizaine - 10 unités)
2. L'écriture (1 - 10)
3. Exercices oraux : combien de dizaines (obstacle : nombre petit et unité grande - nombre grand et unité petite)
4. Exercices oraux en cachant "dizaine" ou "unité" ("J'en vois 10, c'est...").

On recommencera ceci lors de l'introduction de la centaine.

Remarque : L'enfant qui croit être plus riche avec plein de pièces n'a pas encore acquis cette notion.

Exercice (issus d'une formation de Bernadette Guéritte)

On décide de la règle suivante :

- $3 * = 5 \square = 1$ carambar
- On peut changer 3 * contre 1 carambar
- On peut changer les 5 $\square$ contre 1 carambar
- Si on joue à bataille, 3 * et 5 $\square$ provoquent une bataille

On demande de construire les cartes en suivant les consignes :

- a) 9 étoiles, 12 étoiles, 5 carrés, 10 carrés, 25 carrés
- b) la carte carré qui a la même force que la carte 12 étoiles
- c) la carte carré qui a la même force que la carte 9 étoiles
- d) la carte étoile qui a la même force que la carte 10 carrés
- e) la carte étoile qui a la même force que la carte 25 carrés
- f) une carte carré qui soit moins forte que la carte 3 étoiles
- g) une carte étoile qui soit plus forte que la carte 5 carrés et moins forte que la carte 10 carrés
- h) une carte carré qui soit plus forte que la carte 12 étoiles et moins forte que la carte 15 étoiles
- i) une carte étoile qui soit plus forte que la carte 15 carrés et moins forte que la carte 20 carrés
- j) une carte carré qui soit plus forte que la carte 6 étoiles et moins forte que la carte 9 étoiles

Exercices supplémentaires :

1. Alexandre doit transmettre à Julien un code d'accès. Ils décident qu'Alexandre utilisera une lampe de poche. Un long moment de lumière désignera le chiffre 1 et un court moment le chiffre 0, utilisant ainsi une numération en base deux.

Comment transmettre a) le nombre 13 ?

b) le nombre 2019 ?

2. Cartes magiques

1 3 5 7	2 3 6 7	4 5 6 7	8 9 10 11	16 17 18 19	32 33 34 35
9 11 13 15	10 11 14 15	12 13 14 15	12 13 14 15	20 21 22 23	36 37 38 39
17 19 21 23	18 19 22 23	20 21 22 23	24 25 26 27	24 25 26 27	40 41 42 43
25 27 29 31	26 27 30 31	28 29 30 31	28 29 30 31	28 29 30 31	44 45 46 47
33 35 37 39	34 35 38 39	36 37 38 39	40 41 42 43	48 49 50 51	48 49 50 51
41 43 45 47	42 43 46 47	44 45 46 47	44 45 46 47	52 53 54 55	52 53 54 55
49 51 53 55	50 51 54 55	52 53 54 55	56 57 58 59	56 57 58 59	56 57 58 59
57 59 61 63	58 59 62 63	60 61 62 63	60 61 62 63	60 61 62 63	60 61 62 63

Pensez à un nombre compris entre 0 et 63 et dites-moi sur quelle(s) cartes il apparaît, je trouverai votre nombre. Pourquoi ?

2.6. Introduction des bases à l'école primaire

Base 2

On donne un ensemble de jetons (par exemple 15).

On demande de former des ensembles de 2 éléments, puis des ensembles de 2 ensembles à 2 éléments...

On présente le dénombrement sous forme de colonne, tableau ou abaque de droite à gauche en remplaçant les "titres" des colonnes par leur valeur notée en système décimal ou en puissance de la base; On note alors le nombre d'éléments de l'ensemble initial.

Pour mettre en évidence la position relative des chiffres, on peut partir d'une boîte cloisonnée en cases et placer tous les jetons dans la case de droite. On convient alors de remplacer deux jetons d'une case par un seul jeton dans la case immédiatement à sa gauche.

On peut également utiliser les réglettes.

On observe qu'en base deux, seuls deux chiffres, 0 et 1 sont nécessaires.

Base 3 : La démarche est la même et conduit à l'utilisation de 3 chiffres 0,1,2.

Base 10 : Même système et mise en évidence de l'utilisation de 10 chiffres.

Base 12 ou 16 : Seule difficulté, l'utilisation de "nouveaux chiffres" à convenir.

Base soixante : sera utilisée pour calculer des durées, des mesures d'angles, ...

2.7. Références et outils sur ce sujet

Livre : « *Aider les élèves en français et en math* », De Boeck, cycles 2-3

Livre « *Construire le sens du nombre* » L'addition et la soustraction, Chenelière Education, 2010

Jeux : « *Troc chez le chef indien* », « *Voyage au centre du nombre* »

Applications « *Number Frames, Number Pieces* » pour la manipulation iconique, jeu « *L'attrape nombre ou Number Catcher* »

3. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES

3.1. Généralités

Opération

Une opération permet d'associer à deux nombres ordonnés un troisième nombre. Ces deux nombres ordonnés sont en général représentés par un couple.

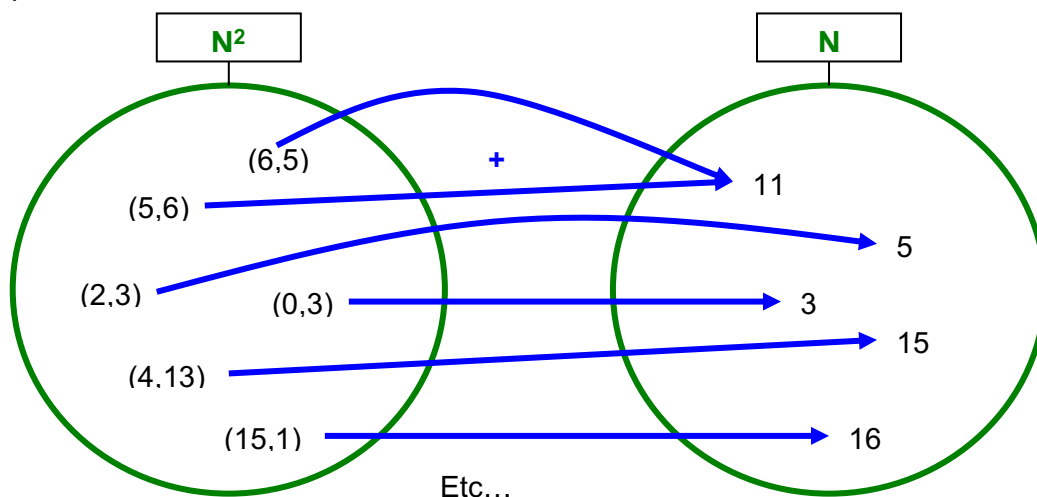
Exemple $(4,5)$ désigne deux nombres ordonnés
 $+ (4,5) \rightarrow 9$ sera écrit $4 + 5 = 9$
 $- (4,5) \rightarrow -1$ sera écrit $4 - 5 = -1$

Plus généralement, une opération (binaire) dans un ensemble est une fonction qui à un couple d'éléments donnés de cet ensemble associe un élément de l'ensemble appelé résultat.

Remarque : Le résultat peut différer selon l'ensemble dans lequel on travaille (par exemple, $4 - 5$ n'a pas de réponse dans $\mathbb{N}$). A l'école primaire, l'ensemble privilégié est l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels, mais on utilisera aussi les nombres rationnels (éléments de l'ensemble $\mathbb{Q}$), et parfois les nombres entiers (positifs et négatifs, éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$).

Définition : Dans un ensemble de nombres donné, une opération est une relation qui, à un couple de nombres fait correspondre un troisième.

Exemple :



Opérateur

A la différence des opérations, un opérateur est quelque chose qui agit sur un nombre.

Pour éviter d'ajouter la difficulté de l'écriture, on représente un opérateur comme une machine qui agit sur un nombre pour le transformer.

Exemples : rouleau avec étiquette, boîte,...

Nombre $\xrightarrow{\text{opérateur}}$ image

Vocabulaire et notations

Si a et b sont les termes et Δ est le signe d'opération, alors le résultat est noté $a\Delta b$ et se lit de la gauche vers la droite. Dans l'expression $a\Delta b$, a est l'opérande et b l'opérateur.

Opérations fondamentales

Nom de l'opération	Nom des termes	Signe	Nom du résultat
Addition	termes	+	somme
Soustraction	termes	-	différence
Multiplication	facteurs (multiplicande et multiplicateur)	x	produit
Division	dividende et diviseur	:	quotient

Propriétés

Il peut y avoir un couple qui n'admet pas de résultat, on dit alors que l'opération n'est pas *partout définie dans l'ensemble*.

Les propriétés abordées systématiquement sont :

- la *commutativité* : le résultat reste toujours le même quand on permute les deux termes.
- l'*associativité* : on peut regrouper (associer) les termes sans altérer le résultat.
- l'*existence d'un élément neutre* : élément qui, pris comme terme, donne toujours comme résultat la valeur de l'autre terme. Le neutre est toujours unique.

Une façon d'introduire les propriétés consiste à faire écrire un maximum de calculs différents à partir de nombres donnés (commutativité), ou faire écrire un maximum de calculs différents en plaçant des parenthèses à différents endroits dans un calcul.

Opération réciproque

Soit une opération $*$ telle que $a * b = c$

Rechercher une opération réciproque Δ consiste à écrire une expression du type

$$a = c \Delta_1 b \quad \text{ou} \quad b = c \Delta_2 a$$

D'une manière générale, une opération engendre deux opérations réciproques.

Si Δ est le signe de l'opération, on associe les 2 opérations de signe respectivement ∇_1 et ∇_2 telles que $a \nabla_1 b = x$ quand $x \Delta b = a$ (on cherche l'opérande de Δ)

et $a \nabla_2 b = y$ quand $a \Delta y = b$. (on cherche l'opérateur de Δ).

Remarque : une opération commutative n'engendre qu'une opération réciproque.

Par exemple, la réciproque de la multiplication est la division, alors que les réciproques de la division sont la multiplication et la division elle-même.

Méthodologie

Rôle spécifique de l'école maternelle

L'approche du sens de la notion d'opération se fait d'abord dans des situations qui ne font pas intervenir le nombre.

Lorsque les opérations portent sur des nombres, l'enfant sera d'abord amené à ajouter ou retirer des quantités sans devoir résoudre l'opération, c'est-à-dire sans donner de résultat image.

Ceci peut se faire par des transformations de collections d'objets (par exemple les boîtes à nombre, ce qui favorisera la fusion cardinal - ordinal du nombre).

A travers des situations multiples, l'enfant d'école maternelle vit l'addition et la soustraction sous leur forme dynamique ou transformationnelle. Plus tard, à l'école primaire, des écritures comme $4=5-1$ ou $5=3+2$ seront riches de sens parce qu'elles évoqueront des actions effectivement réalisées sur des matériels variés.

Il est donc important de ne pas précipiter les étapes et de ne pas passer trop rapidement à une écriture qui n'aurait pas de sens pour les enfants.

Le passage à l'écriture des différentes opérations se fera à l'école primaire, et n'est possible que parce que de nombreuses manipulations ont été effectuées auparavant pour donner un sens à l'opération.

Différentes approches des opérations (5/8)

Les opérations seront d'abord introduites par des actions sur des objets.

La verbalisation de ces actions fera apparaître d'abord les mots du langage courant, et progressivement les mots mathématiques.

Les actions mimées sur des objets, réels ou imaginaires aideront à compléter la compréhension des opérations.

Les nombres seront progressivement utilisées sans puis avec recherche de résultat.

Le passage à la symbolisation, l'écriture de l'opération se fera en 1^{ère} primaire.

Conclusion

On aborde chaque opération par les propriétés qui la définissent et de façon concrète par des manipulations, non par la définition théorique qui résulte d'une progression dans l'abstraction.

Ce n'est qu'un long cheminement qui pourra conduire à l'opération abstraite.

En premier lieu, on s'attachera à donner du sens à l'opération par des manipulations visant à faire apparaître le résultat concrètement et par des problèmes simples où elle doit être utilisée dans ses différents aspects. Ensuite, on mémorise des tables (addition et multiplication) pour permettre de gagner du temps ultérieurement.

C'est seulement alors et pas avant qu'on pourra faire comprendre et acquérir des techniques de calcul mental et des techniques de calcul écrit; Il faut donc induire (pas les imposer) les algorithmes. On veillera à ne pas fournir de recette qui programment les élèves comme des machines, leur évitant ainsi toute possibilité de réflexion! Il est donc impératif d'avoir pris soin de démonter le mécanisme de l'algorithme pour qu'il soit compris en profondeur avant toute utilisation. Une façon d'y arriver est de procéder par manipulations dans l'abaque.

3.2. Les 4 opérations fondamentales : sens, définitions, propriétésAdditionDéfinition abstraite :

L'addition de deux nombres naturels, cardinaux de deux ensembles disjoints, est l'opération fournissant le cardinal de leur réunion comme résultat.

Méthodologie :

On aborde l'addition concrètement par la démarche suivante :

- Présenter 2 collections d'objets considérés comme identiques, collections de cardinal respectif a et b
- Réunir les deux collections
- Ecrire et lire l'addition : en note $a+b$, on lit "a plus b"
- Demander le nombre d'objets : c
- Ecrire le calcul : $a + b = c$

On commence par l'addition de nombres dont la somme est inférieure à 10 puis on envisage le passage à la dizaine. La répétition des calculs aboutit à mémoriser la table jusqu'à 20.

On peut alors seulement expliquer l'algorithme général. (voir plus loin)

Procédés d'addition utilisés par les élèves¹

- Dénombrement de chacune des collections, des collections réunies
- Comptage continu (objets de la 1^{ère} collection puis de la 2^e)
- Comptage "à partir de" des objets de la 2^e collection
- Connaissance directe du résultat (utilisation de la mémoire et/ou de l'expérience)
- Mélange des procédés précédents

Progression : $U + U$, $DU + U$, $DU + DU$

¹ GAUDREAU Anne, "Echec en math ?", p. 138

Soustraction

Définitions abstraites

La soustraction est l'opération réciproque de l'addition.

La différence d'un couple de nombres est le nombre qu'il faut ajouter au deuxième pour obtenir le premier.

Remarque : Dans $\mathbb{N}$, la différence n'existe pas toujours.

Cette définition repose sur la notion de complément.

Pour les nombres naturels, une définition ensembliste existe : Etant donné deux nombres a et b , cardinaux de deux ensembles A , B tels que B est inclus dans A , la différence $a-b$ est le cardinal de l'ensemble $A \setminus B$, complément de B par rapport à A .

Méthodologie

Manipulation de base : à partir de deux ensembles dont l'un est inclus à l'autre, former l'ensemble des éléments appartenant au contenant sans appartenir au contenu (ensemble complémentaire).

Confronter les élèves aux deux aspects de la soustraction : *ôter* une quantité d'une autre (aspect transformation, opérateur) ou *comparer* deux quantités.

Ici aussi, on écrit l'opération $a-b$ et on lit "a moins b".

Si le résultat est c , on note le calcul $a-b=c$.

Plus tard, on abordera l'algorithme.

Progression : DU - U, DU - DU

Différentes situations soustractives¹

- Chercher ce qui reste (Exemple de situation : Paul a 9 billes, il en perd 4)
- Chercher ce qui manque (Ex. : Pour jouer au scrabble, j'ai besoin de 7 lettres ; j'en ai 5)
- Chercher la différence (Ex. : Paul a 9 billes, François en a 5)
- Chercher le complément (Ex. : Dans un bouquet de fleurs, 8 sont des roses.)
- Chercher la distance (Ex. : Dans mon immeuble, j'habite au 3^e étage et mon amie au 11^e étage)

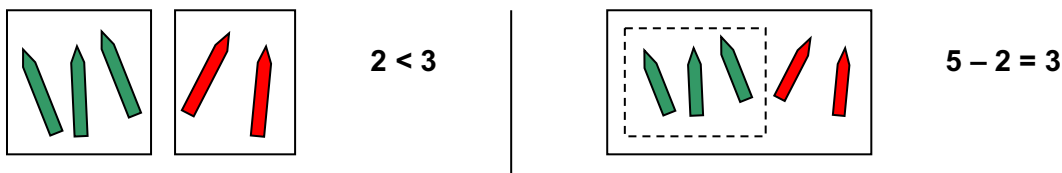
Il existe plusieurs termes pour désigner une différence :

- ce qu'il faut enlever
- ce qu'il faut ajouter
- ce qui reste
- ce qui manque
- ce qu'il y a en moins

Cette dernière formulation est dangereuse dans une première approche de la soustraction :

elle induit davantage une **comparaison** entre deux collections « il y a **moins** de crayons rouges **que** de crayons verts » ($2 < 3$)

plutôt qu'une **combinaison** aboutissant à un résultat « le nombre de crayons **moins** le nombre de crayons rouges » ($5 - 2 = 3$) (**moins** signifie « dont je retire »)



Ces deux expressions, « moins que » et « moins » n'ont **rien en commun**, sinon le mot « moins ». De plus, en partant d'une comparaison pour introduire la soustraction, on se

¹ BASSIS O., "Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques", Hachette Education, Paris, 2003

retrouve vite dans une impasse car dans une comparaison, on part de la plus petite collection, le contraire de l'ordre logique de la soustraction !

Procédés de recherche d'une différence utilisés par les élèves¹

- Dénombrement des éléments de la collection restante
- Comptage à rebours (comptage continu dans la recherche du complément)
- Connaissance directe du résultat (utilisation de la mémoire et/ou de l'expérience)
- Mélange des procédés précédents

Exemple d'activité (5/8)

On donne six cartons : $3 - 2 - 1 - - - = - +$

On demande de trouver toutes les opérations possibles.

Plus tard, on peut remplacer une carte par x, puis par des lettres, on peut aussi prendre d'autres nombres, même très grands.

Référence supplémentaire sur la soustraction à l'école élémentaire :

<https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA06014.pdf>

Jeu « Calculodingo », jeu en ligne « Opération chuss »

La multiplication

Construction de relations multiplicatives

Prendre un certain nombre de fois une collection constituée de 4 objets par exemple, et voir comment passer directement d'une boîte à l'autre.

Définition abstraite

Multiplier a par b, c'est additionner b nombres égaux à a. $\underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ termes}} = axb = a.b$

Remarque : Par définition, les deux facteurs ne sont pas de même nature; c'est la commutativité de la multiplication des nombres qui permet de ne plus distinguer multiplicande et multiplicateur.

Autre définition théorique.

Le produit de a par b est le cardinal de l'ensemble de tous les couples dont l'origine appartient à un ensemble de cardinal a et l'extrémité appartient à un ensemble de cardinal b (cardinal du produit cartésien des ensembles)

Méthodologie

Manipulation de base : réunir (au sens ensembliste) plusieurs ensembles disjoints de même cardinal. On prend par exemple un certain nombre de fois (a) une collection constituée de b objets, et on voit comment passer directement d'une boîte à l'autre : ceci permet de construire des relations multiplicatives.

On présente concrètement a sacs de b objets. Combien d'objets a-t-on en tout?

Notation $\underbrace{b + b + b + \dots + b}_{a \text{ termes}}$, puis a x b en indiquant le signe par analogie avec les autres opérations.

Remarque :

La multiplication fait rapidement apparaître les tables de multiplications. Elles sont nécessaires car la multiplication de nombres à un chiffre permet en calcul écrit de multiplier des nombres à plusieurs chiffres. Attention toutefois à ne pas se lancer trop rapidement dans la mémorisation de ces tables. Il faut d'abord avoir bien compris ce qu'est une multiplication. Sans cela l'enfant aura

¹ GAUDREAU Anne, "Echec en math ?", p. 139

de gros problèmes dans l'apprentissage de l'algèbre en première secondaire ; dans le calcul algébrique, les tables ne sont quasiment d'aucune utilité. Bien évidemment, l'apprentissage des tables ne se fait pas dans l'ordre numérique, mais bien dans celui de la « facilité ».

Remarque : différence entre table « de 4 » et table « par 4 »

- table de 4 : on considère un même nombre pris un certain nombre de fois
 $1 \times 4, 2 \times 4, 3 \times 4, 4 \times 4, \dots$
- table par 4 : on prend un certain nombre de fois (ici 4) les différents nombres
 $4 \times 1, 4 \times 2, 4 \times 3, \dots$

La multiplication : remarques méthodologiques

1. Questions

Peut-on effectuer en pouvant expliquer le sens concret :

- un nombre de vaches + un nombre de vaches ?
- un nombre de vaches $\times$ un nombre de vaches ?
- un nombre de vaches - un nombre de vaches ?
- un nombre de vaches : un nombre de vaches ?
- un nombre de vaches + un nombre de camions ?
- un nombre de vaches $\times$ un nombre de camions ?
- un nombre de vaches - un nombre de camions ?
- un nombre de vaches : un nombre de camions ?
- un nombre de bonbons : un nombre d'enfants ?
- un nombre de mètres + un nombre de mètres ?

Peut-on diviser un nombre de vaches par un nombre de vaches pour trouver un nombre de messieurs ?

Peut-on multiplier un nombre de tables par un nombre d'enfants pour trouver un nombre de tables ?

Peut-on multiplier un nombre de tables par un nombre d'enfants pour trouver un nombre d'enfants ?

Attention aux unités! Deux camions multipliés par trois camions donnent six camions carrés au même titre qu'une multiplication de mètres donne des mètres carrés. Une manière intéressante d'introduire la multiplication est de créer des rectangles de carrés dont les longueur et largeur sont données par les multiplicateur et multiplicande. La multiplication peut aussi être introduite par comptage des possibilités (cases) existant dans un tableau à 2 entrées (combinatoire, notion de produit cartésien). Cela permet par exemple de faciliter l'apprentissage de la commutativité ou celui ultérieur des surfaces et volumes et bien d'autres notions encore.

2. Multiplier par dix un nombre

Dans une base autre que dix, c'est prendre dix fois le nombre ; en base dix, on décale le nombre (càd chaque chiffre du nombre) d'un rang vers la gauche

3. Introduction de la multiplication

Idée d'une machine qui donne toujours le même nombre d'objets.

Exemple 3 $\rightarrow \times 2 \rightarrow$ Ici, on utilise l'opérateur : 3×2 , c'est 3 pris 2 fois

Autre présentation : 3 paquets de 5 traduits par 3×5 ou 5×3

Présentation plus abstraite : $5 + 5 + 5$ ou 3×5

Une difficulté est de percevoir la commutativité de la multiplication, qu'il ne faut pas imposer.

Application au calcul de grandeurs (exemple : aires) : on choisit d'abord l'étalon adéquat (par exemple le m^2 et on ne multiplie pas des mètres par des mètres : l'explication peut être donnée avec des allumettes "carrées" pour mesurer une surface plutôt que des allumettes $\times$ des allumettes)

4. Qu'est-ce qu'une multiplication ?

Un produit de 2 facteurs n'ayant pas de rapport l'un avec l'autre : il y a un facteur spatial et un facteur temporel.

Pour une multiplication, il faut pouvoir "effacer ce que l'on voit" pour l'appeler par un "un" qui change de nom. (analogie avec le français "la foule hurle" : singulier collectif)

Notion de produit cartésien : il faut pouvoir "fabriquer tous les possibles".
(prérequis : classification)

5. Epreuves de bilan

Niveau 1

On dispose d'une boîte à 9 alvéoles. On demande de la remplir :

- 1 cube par alvéole
- 1 cube par alvéole et il en reste 2
- 1 cube par alvéole sauf 2 alvéoles vides
- 2 cubes par alvéole

Niveau 2

On donne une feuille avec 3 rangées de 5 points.

On demande de placer 1 cube sur chaque point.

On ramasse les cubes par rangée (3 paquets) puis par colonne (5 paquets).

On demande où il y a le plus de cubes et pourquoi.

Montrer 12 allumettes "x10"

6. Progression

Passages d'un domaine à l'autre (cf. 10 domaines dans lesquels travailler chaque opération)

Il est important de dissocier le contenu et pas l'opérateur (exemple : 6 fois (2cubes)).

Il faut faire comprendre que chaque paquet est pareil.

Passage à la division (12 en 6 paquets de 2)

En effet, il est important de parler de la multiplication et de la division

Pour Gérard Vergnaud, "toute multiplication est une règle de trois".

Contenu	Contenant
5	1
?	3

$N \text{ contenu} \times N \text{ contenant} = \dots \text{ contenu}$

Il y a deux opérations réciproques, qui donnent 2 sens différents à la division :

contenu : contenant = contenu

contenu : contenu = contenant

Partage

mesure

Progression dans les termes utilisés

- 3 rangées de 5 verres
- 3 rouleaux de 5 mètres
- 3 sacs de 5 kg de pommes de terre
- 3 choux-fleurs à 5 francs l'un
- 3 boîtes de 12 œufs
- 3 douzaines d'œufs
- 3 paquets de 10 allumettes
- 3 dizaines
- 3 semaines

3 heures à 5km/h
3 jours de 5 h à 10F/h

Remarque : l'écoulement temporel du langage est l'inverse de l'écoulement temporel de la pensée mathématique (pour opérer, c'est réaliser ce qu'on a dit);

Exercice de vérification de l'associativité :

On achète 3 caisses de 6 bouteilles coûtant 7 euros la bouteille. Combien va-t-on payer ?
(difficulté : effacement du contenu au bénéfice du contenant)

Il est impossible de mémoriser les tables sans avoir compris le sens de la multiplication.

7. Différents aspects de la multiplication

- Produit cartésien (pas commutatif en général)
- Temporalisation (choix du contenu, actionner x fois le contenant)
- Spatialisation : Traduire une situation en opération
- Grilles (exemple 3×7) Les facteurs sont de même nature.
Il est important de faire fabriquer la grille rangée par rangée
Applications : aire et périmètre du carré
- Lien avec les Suites Directement Proportionnelles

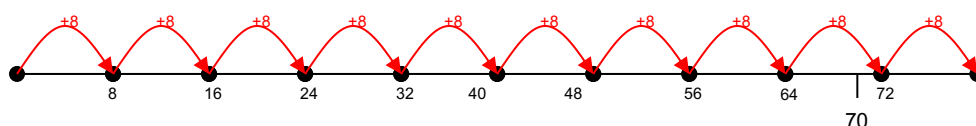
La division

Introduction

Première approche : partages d'objets

Ceci permet d'aborder plusieurs aspects de la division

- l'idée de tâtonnement : tout le monde doit tâtonner pour diviser
- la notion d'encadrement
- la notion du reste
- la notion de règles : on se fixe un invariant (en général, dividende ou diviseur)
- la notion d'infini (plus tard)



L'approche par encadrement consiste à rechercher une fourchette de valeurs pour le quotient. Par exemple, on peut encadrer le quotient « $70 : 8$ » par les valeurs 8 (64 divisé par 8) et 9 (72 divisé par 8). Il suffit pour cela d'encadrer le dividende (70) par les deux multiples successifs de 8.

Le quotient de la division « $70 : 8$ » est situé entre 8 et 9.

Cette façon de procéder présente plusieurs avantages :

- elle donne immédiatement le reste par excès $70 - 64 = 6$ et le reste par défaut $72 - 70 = 2$
- elle permet à l'enfant de travailler par approximation, et à ne pas appliquer un algorithme tête baissée ;
- elle renforce la structuration des nombres ;
- le procédé peut être récurrent, et validé scientifiquement : en l'affinant, on peut l'exploiter pour rechercher un quotient non entier, et même non décimal

Ses limites sont celles du calcul rapide.

Deuxième approche

Répartir 6 marrons en lignes et en colonnes en cherchant le maximum de représentations.

Troisième approche : parcours de tous les possibles

Soit deux nombres 17 et 5 avec l'idée de division.

A l'aide de matériel, présenter un maximum de situations possibles

Prolongement : Que se passe-t-il si on limite 17 au dividende et 5 au diviseur ? Quelles sont les divisions euclidiennes et non euclidiennes réalisables ?

DivisionDéfinition abstraite

La division (exacte) est l'opération réciproque de la multiplication.

Diviser un nombre a par un nombre b, c'est déterminer un nombre c qui multiplié par b donne a.

$$a : b = c \quad \text{ssi} \quad c \times b = a$$

Dans $\mathbb{N}$, le quotient n'existe pas toujours.

Division concrète

Comme les deux facteurs d'une multiplication concrète sont hétérogènes (c'est à dire n'ont pas le même sens : nombre et quantité), l'opération réciproque (inverse) génère deux divisions concrètes de nature différente : la division de partage et la division de mesure (ou de contenance).

Division de partage :

Partager une quantité donnée en un nombre connu de parts égales. Le résultat est une quantité (part).

(Exemple : A partir d'un sac de 27 objets, remplir 9 sacs d'un même nombre d'objets)

Division de mesure :

Trouver combien de parts égales connues on peut obtenir à partir d'une quantité donnée. Le résultat est un nombre (mesure).

On mesure une quantité par rapport à une de ses parts.

(Exemple : A partir d'un sac de 27 objets, former un certain nombre de sacs de 9 objets.)

Remarque : La division partage ne peut s'appliquer à un nombre qui n'est pas entier : $3 : \frac{1}{2}$ ne

signifie pas qu'on partage 3 en demi part, cela n'a pas de sens.

Le sens donné à ces divisions est celui d'une contenance : « combien de fois un demi est-il contenu dans 3 ? » : 6 fois.

De même, « $4,5 : 0,3$ » se traduit : « Combien de fois 0,3 dans 4,5 ? »

Méthodologie

On donne du sens à l'opération concrète par de petits problèmes, en abordant les deux aspects. On constate facilement que le quotient n'existe pas toujours dans $\mathbb{N}$. Dans ce cas, il reste des objets ou bien il en manque. On débouche alors sur la notion de division approchée ou division euclidienne.

Division euclidienneDéfinition abstraite

La division euclidienne n'est pas une opération au sens rigoureux de la définition mathématique.

En effet, à un couple de nombres, on n'associe pas un résultat mais deux : le quotient et le reste.

Il y a deux divisions approchées : la division par défaut et la division par excès.

Formellement : $(a,b) \rightarrow (q,r)$ où $r < b$ et tel que :

Pour une division par défaut : $a = b \times q + r$

Pour une division par excès : $a = b \times q - r$

Reste par défaut, reste par excès

Si un nombre n n'est pas divisible par d (d étant un nombre différent de 0 et 1), c'est soit :

- parce qu'il compte « en trop » le reste par défaut
- parce qu'il lui « manque » le reste par excès

Le reste est strictement inférieur au diviseur.

Si on effectue une division par défaut (excès), le couple (q, r) est unique.

Exemple : Calculer le quotient et le reste par défaut puis par excès de $18 : 7$

Remarque : les notations suivantes ne sont pas correctes (*Comment les remplacer ?*):

(en base dix) $16 : 3 = 5$ ou $16 : 5 = 5 \text{ r}(1)$ ou $16 : 3 = 5 + 1$

Travail sur le reste

Découvrir comment savoir sur qui va tomber la comptine « amstramgram », quel jour de la semaine sera le 30 juin l'année prochaine.

Vocabulaire.

Si $n = d \times q_1 + r_1$ où $r_1 < d$

alors

n est appelé dividende

d est appelé diviseur

q_1 est appelé quotient par défaut

r_1 est appelé reste par défaut

q_2 est appelé quotient par excès

r_2 est appelé reste par excès

$n = d \times q_2 - r_2$

Une division de a par b peut être représentée par une configuration en rectangle de b colonnes de cases dans lesquelles on distribue a jetons. Si la division se fait exactement, le nombre de lignes correspond au quotient et le reste est nul. Si ce n'est pas le cas, il y a une ligne entamée et non complète qui permet de visualiser le reste par défaut (cases remplies) ou par excès (cases restées vides). Le quotient par défaut est le nombre de lignes complètes, le quotient par excès est le nombre de lignes y compris la ligne entamée.

Ex: $(17, 5) \rightarrow (3, 2)$ par défaut. et $(17, 5) \rightarrow (4, 3)$ par excès.

Diviseur=5 (5 colonnes)

•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•			

reste par défaut.

reste par excès.

Exercices particulièrement conseillés :

1. On effectue la division approchée par défaut de 2017 par 10.
 - a. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ajouter au dividende pour augmenter le quotient de 3 ?
 - b. Quel est le plus grand nombre que l'on peut soustraire du dividende pour diminuer le quotient de 2 ?
2. On choisit, sans les nommer, deux nombres a et b . On divise a par b . La division n'est pas exacte. Si on augmente a de 20, sans changer b , le quotient augmente de 2 et le reste diminue de 2. Que vaut b ?
3. On divise 932 par b et l'on obtient un reste égal à 132. Quelles peuvent être les valeurs de b et du quotient correspondant ? (R : 800-1 ou 400-2 ou 200-4 ou 160-5)

3.3. Un matériel : les réglettes Cuisenaire

Origine

Les réglettes Cuisenaire ont été inventées par un instituteur de Thuin : Georges Cuisenaire. Elles sont utilisées, avec le matériel qui les accompagne, depuis 1953.

Noms des réglettes

Les noms des réglettes sont une convention. L'inventeur ne les utilisait pas, ils ont été ajoutés par la suite. Cette convention étant utilisée en primaire, il est important d'utiliser directement le terme standard pour nommer les réglettes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
blanc	rouge	vert clair	Rose	jaune	Vert foncé	noir	marron	Bleu	Orange
b	r	v	R	j	V	n	m	B	O

Intérêt

Elles permettent une approche qualitative de notions logico-mathématiques utiles à la construction du nombre : comparaisons, sériations, opérations, propriétés des opérations.

Elles permettent de travailler la notion de nombre naturel sous son aspect ordinal et cardinal.

Elles permettent aussi une utilisation de vocabulaire mathématique en dehors d'un contexte numérique et constituent donc une aide pour découvrir le sens des opérations.

Elles peuvent également être utilisées pour aborder les notions de longueur, surface et volume (voir chapitre sur les grandeurs).

Activités de base à réaliser avec les réglettes (PAS DE NOMBRE)

- Découverte) depuis la
- Comparaison de longueurs (+ justification)) maternelle
- Sériation de longueurs)

Activités à mener en parallèle

- Dénombrements de différentes collections, aspect cardinal
- Introduction des symboles < et > pour comparer des collections
- Aspect ordinal : sérier des collections d'objets
- Activités numériques concrètes jusque 5, jusque 10

Sens des opérations à l'aide des réglettes (TOUJOURS PAS DE NOMBRE)

- Réalisation de trains - lecture des trains (exemples : $B + R + v$, $3 \times r$)
- Ecriture du "calcul" : exemples $R = b + v$, $2 \times v = V$
("=" peut se lire "est aussi long que")
- Décompositions différentes d'une réglette : "tapis" en 2 ou 3 réglettes
(à ne pas faire retenir par cœur ; fait apparaître la commutativité, l'associativité si on utilise au moins 3 réglettes, intérêt de structurer le raisonnement)
- Exercices du type : $r + V = \dots$, $r + r = \dots$
- Exercices plus complexes : $V = R + \dots$, $b + b + \dots = V$, $\dots + r = j$
- Ecriture multiplicative : $V = b+b+b+b+b+b$ ou $V = 6 \times b$
- Passage aux parenthèses : exemples : $m = (3 \times r) + (2 \times b)$; $m = (2 \times v) + r$, $m = (2 \times r) + (4 \times b)$ (les parenthèses peuvent se marquer avec les mains)
- Soustraction
- Décompositions multiplicatives (tapis dont les lignes ont la même couleur)
- Utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition
- Lien avec les nombres (pas avant)
- Division – partage (moitié, tiers, ... de ...)

Mise en garde

Cette approche qualitative est réduite à néant si on attribue trop tôt un nombre à chaque réglette : il est donc impératif de ne pas le faire à l'école maternelle !

Les propriétés de l'addition, à savoir la commutativité, l'associativité et la distributivité, peuvent être abordées à l'aide de trains de réglettes :

- pour la commutativité, en changeant la place de deux réglettes
- pour l'associativité, en remplaçant deux wagons du train par un seul
- pour la distributivité, en remplaçant des wagons du train par de plus petits

Question didactique

Pour chaque opération, dire quels domaines seront abordés à chaque degré de l'école primaire et illustrer par un exemple dans chaque cas.

1. Les objets et les actions
2. Les mots parlés en langage courant
3. Les mots mathématiques
4. Le mime - Les actions
5. Les nombres
6. Les écritures opératoires
7. Les problèmes dessinés
8. Les textes de problèmes
9. L'algèbre
10. La formalisation : Définition - Formule
-
11. La réversibilité des opérations
12. La temporalité

Passages d'un domaine à l'autre

3.4. Propriétés des opérations**Commutativité**

Une opération est commutative dans un ensemble si l'ordre des éléments n'influence pas le résultat.

Exemples

L'addition est commutative dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$

La soustraction n'est pas commutative dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \exists 5, 2 \in \mathbb{N} : 5 - 2 \neq 2 - 5$

Remarque :

La commutativité de la multiplication est assez longue à intégrer et n'est mise que progressivement en évidence.

Associativité

Une opération est associative si l'ordre des opérations n'a pas d'influence sur le résultat.

La multiplication est associative dans $\mathbb{N} \Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{N} : (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

On peut alors écrire $a \times b \times c$ sans préciser par où commencer.

La soustraction n'est pas associative dans $\mathbb{N}$ Par ex : $(10 - 6) - 1 \neq 10 - (6 - 1)$

Neutre

Un élément neutre est un élément qui combiné à n'importe quel autre terme, donne toujours cet autre terme comme résultat.

0 est neutre pour l'addition ($a + 0 = a = 0 + a$), 1 pour la multiplication ($a \times 1 = a = 1 \times a$)

Absorbant

L'absorbant est un élément qui, combiné à n'importe quel autre, donne cet absorbant comme résultat.

0 est absorbant pour la multiplication $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{N} : a \times 0 = 0 = 0 \times a$

Symétrique

Pour pouvoir trouver le symétrique d'un élément, il faut d'abord qu'il y ait un neutre.

Si on travaille dans l'ensemble des nombres rationnels non nuls ($\mathbb{Q}_0$),

1 étant le neutre pour la multiplication:

$1/a$ est le symétrique de a dans $\mathbb{Q}_0 \Leftrightarrow a \times 1/a = 1 = 1/a \times a$.

Distributivité

La distributivité établit un lien entre deux opérations différentes.

Exemple : la multiplication distribue l'addition.

Soit 3 nombres a, b, c : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

et $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

Tableau de synthèse pour les 4 opérations fondamentales

	addition	soustraction	multiplication	division
toujours définie	oui	non dans $\mathbb{N}$ oui dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	oui	non dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oui dans $\mathbb{Q}_0, \mathbb{R}_0$
commutativité	oui	non	oui	non
associativité	oui	non	oui	non
neutre	0	non ($0-7 \neq 7-0$)	1	non ($7:1 \neq 1:7$)
absorbant	non	non	0	non ($0:4 \neq 4:0$)
symétrique	oui, l'opposé	non	non dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oui dans $\mathbb{Q}_0, \mathbb{R}_0$	non
distributivité	la multiplication distribue l'addition			

($\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels,

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers positifs ou négatifs

$\mathbb{Q}$: ensemble des rationnels (fractions) : voir chapitre sur les nombres à virgule

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels : voir chapitre sur les nombres à virgule)

Compensation

Ces propriétés, s'assimilant plutôt à des méthodes de calcul, vont permettre de remplacer un calcul par un calcul équivalent plus simple à effectuer (le plus souvent mentalement).

Dans l'addition : $a + b = (a + c) + (b - c)$ ou $a + b = (a - c) + (b + c)$

(compensation croisée)

Dans une addition, si on ajoute (retranche) un nombre au premier terme et que l'on retranche (ajoute) ce même nombre du deuxième terme, la somme ne change pas

Exemple d'utilisation : $48 + 7 = (48 + 2) + (7 - 2)$

Dans la soustraction : $a - b = (a + c) - (b + c)$ ou $a - b = (a - c) - (b - c)$

(compensation parallèle)

Dans une soustraction, si on ajoute ou retranche le même nombre aux deux termes, la différence ne change pas.

Exemple d'utilisation : $528 - 99 = (528 + 1) - (99 + 1)$

Dans la multiplication : $a \times b = (a \times c) \times (b : c)$ ou $a \times b = (a : c) \times (b \times c)$

(compensation croisée)

Dans une multiplication, si on multiplie (divise) par un nombre le premier facteur et que l'on divise (multiplie) par ce même nombre le deuxième facteur, le produit ne change pas.

Exemple d'utilisation : $5 \times 48 = (5 \times 2) \times (48 : 2)$

Dans la division : $a : b = (a \times c) : (b \times c)$ ou $a : b = (a : c) \times (b : c)$

(compensation parallèle)

Dans une division, si on multiplie ou divise par le même nombre les deux termes, le quotient ne change pas.

Exemple d'utilisation : $84000 : 6000 = (84000 : 1000) : (6000 : 1000)$

Complément : règles de priorité

Cette notion est enseignée au début du secondaire, mais parfois déjà abordée en 6^e primaire. Néanmoins, elle pourra être déjà abordée en primaire lorsque l'occasion s'en présente, par exemple en comparant les résultats d'un calcul effectué avec ou sans calculatrice (scientifique).

Dans un calcul, les différentes opérations s'effectuent dans l'ordre suivant :

1. puissances
2. parenthèses
3. multiplications et division
4. additions et soustractions

3.5. Les tables

Exercice didactique : construction et mémorisation de la table de 37.

Tables de multiplication : méthodologie

Étapes importantes

Matériel concret : 10 paquets de ... objets) mise en

Manipulation (jeux, mouvements, ...)) situation

Comptage par ... (peut avoir été vu avant)

Jeux et découverte progressive de la table (varier les codages)

Écriture de la table complète (0 x ... jusqu'à 10 x ...)

Liens entre des calculs, avec d'autres tables

Mémorisation de la table

Vérification de la mémorisation et entretien (jeux, calculs, ...) en mélangeant les calculs

Présentations d'une table de multiplication

Table classique

Intérêt : structure

Inconvénient : mémorisation "verticale" des résultats seuls

Présentation des calculs séparément

Intérêt : les 3 nombres sont mémorisés

Quadrillages

Permet de passer à une représentation plus visuelle et plus concrète du calcul

Mandala : Structure spatiale

Quelques activités pour vérifier l'acquisition des tables

Bataille multiplicative, Loto (calcul → nombre, nombre → calcul), puzzles

Memory, mariages, Jeu de dominos avec les tables mélangées

Cartons individuels reprenant les calculs, Coloriage codé, Devinettes, Labyrinthes,

Difficultés possibles

Non-mémorisation en classe par manque d'attention

Comptage à la place de la mémorisation

Non maîtrise du concept de multiplication

Mémorisation sans retour au concret, sans évoquer la quantité

Mauvaise technique d'étude

4. CALCUL MENTAL

Sens du calcul mental à l'école primaire

Exemple : calculer 38×15

Seul le calcul mental permet une progression permettant de faire réfléchir un élève tout au long de l'enseignement primaire.

En effet, le calcul écrit décompose un calcul éventuellement compliqué en toute une série de calculs utilisant des nombres à un chiffre. Une fois ces calculs maîtrisés, le calcul écrit ne devient qu'une succession d'automatismes et ne garde que son intérêt pratique.

Le calcul mental peut se voir quant à lui comme une succession de nouveaux défis et de résolutions de problèmes. A condition de maîtriser l'indispensable, à savoir les tables d'addition et de multiplication, le calcul mental peut être l'occasion d'une activité intellectuelle intense qui met en jeu la capacité à produire des solutions originales...

Un même calcul peut se faire de plusieurs manières différentes. Aucune n'est nécessairement meilleure que l'autre. L'important est que l'élève connaisse chacune d'elles afin d'appliquer celle qui lui paraît la plus simple.

Remarque méthodologique

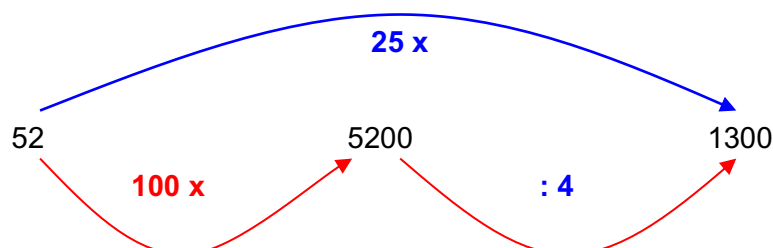
Quelques exemples de procédés différents pour effectuer un même calcul

- compensation croisée : $26 \times 45 = (26 \times 5) \times (45 : 5) = 130 \times 9 = 1170$
- groupement : $26 \times 45 = 13 \times 2 \times 5 \times 9 = 13 \times 10 \times 9 = 10 \times 117 = 1170$
- décomposition en une somme : $26 \times 45 = 25 \times 45 + 1 \times 45 = 1125 + 45 = 1170$
- décomposition en une différence : $26 \times 45 = 45 \times 26 = 26 \times 50 - 26 \times 5 = 1300 - 130 = 1170$

Quelques techniques concernant la multiplication et division

Composée d'opérateurs

Exemples : prendre $25x$ c'est prendre $100x$ puis diviser le résultat par 4



Décomposition en une somme ou une différence (distributivité)

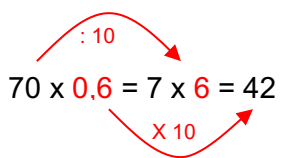
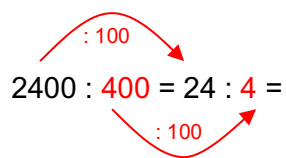
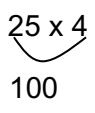
Exemple : faire $11x$ c'est faire $10x$ et ajouter $1x$

faire $9x$ c'est faire $10x$ et enlever $1x$

Synthèse des différents procédés

Quelques procédés généraux

Dans...	L'addition	La soustraction
compensation	$188 + 69 = 187 + 70 = 257$ $188 + 69 = 190 + 67 = 257$	$203 - 94 = 209 - 100 = 109$ $203 - 94 = 200 - 91 = 109$ Non associative
groupement	$23 + 61 + 77$ $= 61 + 23 + 77 = 161$ 100 Commutativité associativité	
Décomposition en une somme	$838 + 32 = 800 + 38 + 32$ $= 800 + 70 =$	$86 - 58 = 86 - (50 + 8)$ $= 86 - 50 - 8$ $= 36 - 8 = 28$
Décomposition en une différence	$765 + 98 = 765 + 100 - 2$ $= 865 - 2 = 863$	$97 - 48 = 97 - (50 - 2)$ $= 97 - 50 + 2$ $= 47 + 2 = 49$

Dans...	La multiplication	La division
compensation	 $70 \times 0,6 = 7 \times 6 = 42$	 $2400 : 400 = 24 : 4 = 6$
groupement	$13 \times 25 \times 3 \times 4$ $= 13 \times 3 \times 25 \times 4 = 3900$  Commutativité associativité	Non associative
Décomposition en une somme	$140 \times 8 = (100 + 40) \times 8$ $= 100 \times 8 + 40 \times 8$ $= 800 + 320 = 1120$	$1025 : 25 = (1000 + 25) : 25$ $= 1000 : 25 + 25 : 25$ $= 40 + 1 = 41$
Décomposition en une différence	$599 \times 7 = (600 - 1) \times 7$ $= 600 \times 7 - 1 \times 7$ $= 4200 - 7 = 4193$	$8982 : 9 = (9000 - 18) : 9$ $= 9000 : 9 - 18 : 9$ $= 1000 - 2 = 998$

5. CALCUL ECRIT

Questions préliminaires

1. Pourquoi commence-t-on par la droite lors d'une addition, soustraction ou multiplication, et par la gauche pour une division ?
2. Comment introduire le calcul écrit en classe ?

Le calcul écrit est un produit socio-historique, et varie selon les cultures.

Bien qu'il soit constitué d'algorithmes, il est essentiel que l'enfant comprenne leur structure et ne se contente pas d'utiliser des mécanismes sans signification.

Ainsi, il est important de prendre le temps de justifier les différentes techniques utilisées comme par exemple le fait de commencer à droite pour une addition, soustraction, multiplication, et à gauche pour une division. Pour ce faire, le recours au matériel concret et à l'abaque est souvent indispensable.

Par ailleurs, la vérification du résultat obtenu pourra être l'occasion de procéder à des estimations (et recourir au calcul mental) et d'utiliser l'opération réciproque.

Les techniques de calcul écrit ne sont pas uniques ; on dénombre facilement plus d'une trentaine de méthodes permettant d'effectuer une multiplication. Il n'y a évidemment aucune raison autre que son goût personnel ou la coordination entre collègues d'une même école pour choisir l'une ou l'autre technique. Ainsi les algorithmes utilisés en Europe occidentale ne sont pas les mêmes qu'en Europe centrale ou orientale et sont encore différents de ceux des Asiatiques.

5.1. L'addition écrite

Progression

- Addition sans report et disposition pratique
Exemple :

	C	D	U
	1	2	8
+	3	5	1
	4	7	9

- Addition avec un puis plusieurs reports
Exemple :

	C	D	U
	1 ¹	7	8
+	3	5	1
	5	2	9

Un exemple : $9237 + 8909$ à expliquer.

5.2. La soustraction écrite

Progression

- Soustraction élémentaire et disposition pratique
- Soustraction avec manque d'unités à un puis plusieurs rangs
- Soustraction avec zéro(s)

Procédés possibles

- Abaque (utilisée par les Arabes au XVI^e siècle)
- Compensation ou ajout (on ajoute une même quantité aux deux termes pour obtenir un nombre suffisant d'unités aux rangs où il en manque),
- Emprunt (enseignée encore au XIX^e siècle en France)

- Addition ou par complément (on remplace la soustraction par une recherche d'addition)

Exemples :

1) Soit à résoudre par exemple $174 - 46$ (base dix), explication de $1635 - 241$

a) par emprunt	b) par compensation (ou par ajouts)
On "emprunte" une unité de rang supérieur	On ajoute un même nombre à chaque terme (sous 2 formes différentes)
$\begin{array}{r} 1\overset{5}{6}\overset{13}{3}5 \\ - 241 \\ \hline 1394 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\overset{6}{6}\overset{10}{3}5 \\ - 2^141 \\ \hline 1394 \end{array}$

Exercice : Calculer $2015 - 1992$ en utilisant des méthodes différentes.

2) Soit à résoudre par écrit $(1435)_{\text{six}} - (241)_{\text{six}} =$

a) par emprunt	b) par compensation (ou par ajouts)
On "emprunte" une unité de rang supérieur	On ajoute un même nombre à chaque terme (sous 2 formes différentes)
$\begin{array}{r} 1435 \\ - 241 \\ \hline 1154 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1435 \\ - 241 \\ \hline 1154 \end{array}$

Remarque : Le procédé est souvent fixé par l'école.

Exercice : Résoudre quelques soustractions à l'aide des deux méthodes.

Exemples: $2431 - 555$ (base six), $12006 - 8979$ (base dix)

Conclusion

	Avantages	Inconvénients
Emprunt	Travaille sur les nombres donnés au départ Plus proche de l'addition par écrit	Il faut effectuer une soustraction
Compensation	Plus net (rien n'est barré)	Apport extérieur au nombre

Méthode par complément

324

Exemple : $\underline{152}$ ($2 + \dots = 4$; $5 + \dots = 12$, $1+1+\dots = 3$)

172

Types d'erreurs

1. Erreurs relatives à la présence de 0 dans l'écriture du premier terme de la différence.
2. Erreurs relatives aux retenues.
3. Erreur due à l'application abusive de la règle "on soustrait le plus petit du plus grand".
4. Erreurs dues à la présence de virgules.

Quelques remédiations

1. Apprendre à prévoir l'ordre de grandeur du résultat.
2. Vérifier chaque opération (transformer en addition, utiliser le calcul mental voire la calculatrice).
3. Etude de plusieurs techniques avec leurs avantages et leurs inconvénients.

Pour en savoir plus

PAUVERT Marcelle, *Faire comprendre la soustraction*, Nathan, Paris, 1990 p. 71 à 81

Exercices

1. Le calcul suivant a été proposé à une classe de 3e primaire : $2057 - 683$.
Voici différentes erreurs relevées par l'enseignant. Analyser ces erreurs en décrivant le fonctionnement de l'élève qui a produit chacune d'elles. Quelle remédiation pourrait-on proposer à chaque élève ?

a) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 4827 \end{array}$	b) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 2474 \end{array}$	c) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 1364 \end{array}$	d) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 2634 \end{array}$	e) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 2074 \end{array}$	f) $\begin{array}{r} 2057 \\ -683 \\ \hline 1484 \end{array}$
---	---	---	---	---	---

2. Pourquoi l'exemple d'addition $39 + 54$ est-il mal choisi ?
3. Effectuer les soustractions écrites suivantes (par emprunt et par compensation) :
 - a) base dix : $97-32$; $81-24$; $10001 - 111$
 - b) base deux : $1011-10$; $11101 - 110$; $10001 - 111$
 - c) base trois : $221-10$; $211 - 22$; $10001 - 111$

5.3. La multiplicationProgression

- Multiplications par un nombre à un chiffre, sans puis avec report pour des unités de rang différent, puis avec plusieurs reports
Exemple : a) 431×2 b) 437×2 c) 473×2 d) 743×2 e) 678×2
- Multiplication par un nombre à 2 chiffres
Exemple :

	2	5	7
	x	3	4
1	0	2	8
+7	7	1	
8	7	3	8

Retenues
2 2
1 2

- Utilisation de nombres comprenant des zéros aux différents rangs.
- Utilisation de nombres à virgule.
- Utilisation éventuelle de la compensation (exemple : $0,02 \times 5600 = 2 \times 56$)

Exercice :

Calculer et expliquer : 237×5 (base huit), 237×45 (base huit)

Comparer les façons de procéder de chacun pour calculer par écrit 257×304 .

Techniques de multiplication

La présentation de différentes techniques de multiplication utilisées au cours du temps permet de renforcer la compréhension de notre système décimal.

Références :

- CERQUETTI-ABERKANE F., RODRIGUEZ A. et JOHAN P., *Les mathématiques ont une histoire – activités pour le cycle 3*, Hachette Education, Paris, 1997
- DESMARETS, JADIN, ROUCHE, SARTIAUX, *Oh, moi les maths...*, Ed. Talus d'approche, 1997 p.21 à 23.

Exercices

- Effectuer la multiplication suivante : 45670×432
Comment vérifier s'il n'y a pas d'erreur d'ordre de grandeur ?
- Sans refaire l'opération, comment peut-on savoir de combien s'est trompé l'élève en calculant ces opérations :

a)	321	b)	321
	$\times 102$		$\times 102$
	-----		-----
	642		642
	321		3210
	-----		-----
	963		3852

- Effectuer :
 - en base huit : $(47210)_{\text{huit}} + (3765)_{\text{huit}}$
 - en base cinq : $(4001)_{\text{cinq}} - (1340)_{\text{cinq}}$
 - en base six : huit fois $(121221)_{\text{six}}$
- On donne $A = 202\ 212$ $B = 121\ 221$
 - Calculer $2A+B$ en base quatre
 - $2A-B$ en base trois
 - huit fois B en base six

Compléments : autres techniques de calcul écrit

L'analyse d'autres méthodes utilisées est l'occasion de faire réfléchir (comprendre, appliquer, expliquer) les élèves et de prendre du recul par rapport à nos habitudes.

Quelques exemples :

- Utilisation des bâtons de Neper,
- Multiplication « per gelosia »
- Multiplication « spaghetti » ou japonaise
- Multiplication égyptienne,
- ...

5.4. La division

Introduction avec des problèmes de partages simples (voir cours oral)

Progression

- Nombre à un chiffre au diviseur (exemple : $47 : 3$)
 - Nombre à deux chiffres au diviseur
- Exemple :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 \text{C} & \text{D} & \text{U} \\
 7 & 4 & 7 \\
 - & 7 & 2 \\
 \hline
 & 2 & 7 \\
 - & 1 & 8 \\
 \hline
 & 9 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cc}
 \text{D} & \text{U} \\
 1 & 8 \\
 4 & 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

- Autre exemple : $7347 : 18$ (nombres naturels, nombres décimaux)
- Présence de zéro(s) avec utilisation éventuelle de la compensation (exemple : $175\,000 : 1200$)
- Nombres à virgule

Exercices

Effectuer la division suivante $7476924 : 39$

Expliquer ensuite la signification des chiffres abaissés 7, 6, 9, 2, 4

Exercices de synthèse et de réflexion

- Convertir : a) $(267)_{\text{neuf}}$ en base dix
c) $(576)_{\text{huit}}$ en base dix
b) $(671)_{\text{dix}}$ en base quatorze
d) $(454)_{\text{dix}}$ en base treize
- Trouver la base dans laquelle a) cent s'écrit 40
c) quarante-trois s'écrit 13
b) dix s'écrit 20
- Retrouver les chiffres manquants :

a.

$$\begin{array}{r}
 7 * 8 2 9 \\
 + \quad 5 6 * \\
 + \quad 4 8 0 * 1 \\
 \hline
 * * 0 * 8 8
 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{r}
 * 7 5 * 6 \\
 - \quad * 5 6 * \\
 \hline
 2 4 * 7 5
 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{r}
 3 3 8 * \\
 + \quad * 7 * 1 \\
 \hline
 6 * 2 3
 \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{r}
 4 * 7 \\
 \times \quad 2 * \\
 \hline
 3 6 5 * \\
 9 1 * \\
 \hline
 * * * * 6
 \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{r}
 * 5 4 \\
 \times \quad 6 * \\
 \hline
 4 * 7 8 \\
 3 * * * \\
 \hline
 * * * * *
 \end{array}$$

4.

- La somme de 3 nombres naturels consécutifs est 354. Quels sont ces nombres ?
 - La somme de 5 nombres pairs consécutifs est 230. Quels sont ces
- Le produit de 2 nombres est 1 504; si l'on ajoute 10 à l'un des nombres, le nouveau produit est 1 824. Quels sont les deux nombres de départ ?
 - Dans un vieux livre de comptes, on a trouvé les divisions suivantes en partie effacées. On demande de rétablir les chiffres manquants.

a)

$$\begin{array}{r}
 22**** \mid 386 \\
 **** \mid *** \\
 \hline
 3274 \\
 **** \\
 \hline
 **** \\
 **** \\
 \hline
 **2
 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r}
 ***94 \mid 23** \\
 **** \mid 12 \\
 \hline
 **** \\
 **** \\
 \hline
 30
 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r}
 **** * \mid ** \\
 *** \mid **8** \\
 \hline
 ** \\
 ** \\
 \hline
 *** \\
 *** \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

(R : a)5746 1930 3088 1866 1544 32 584 b)284 2372 4774 4744 12 ou 278 2322 4674 4644 22
c)1089709 108 97 96 109 108 12 90 09)

7. Effectuer

- a. 222×2 en base trois (R : 1221) b. 123×23 en base cinq (R : 3434)

8. Déterminer les chiffres x et y utilisés dans les nombres sachant que

$$\underline{x6} + \underline{x5y} + 7 + \underline{3y7} = \underline{1y04}.$$

9. Trouver un nombre à 4 chiffres noté mcd u tel que $\underline{mcd u} + \underline{udcm} = \underline{cdmu} + 1$

10. La différence de deux nombres a et b est 14. Que deviendrait cette différence

- a. si l'on augmentait le nombre a de 5 et si l'on diminuait en même temps le nombre b de 5 ?
b. si l'on augmentait le nombre b de 3 et si l'on diminuait en même temps le nombre a de 3 ?

11. Montrer que si l'on retranche un nombre formé par 3 chiffres consécutifs, du nombre renversé, la différence égale 198.

12. Trouver un nombre de quatre chiffres mcd u satisfaisant à toutes les conditions suivantes :

- a. la somme des chiffres est 25
b. $d = m + c$
c. $u = m + d$
d. le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres surpasse de 8 082 le nombre cherché.
(R : m=1 c=7 d=8 u=9)

13. Rétablir les chiffres manquants :

$$\begin{array}{r} 2 * 3 * \\ \times \quad 9 a \\ \hline * * * * * \\ * * 9 * 3 \\ \hline * * * * * a \end{array}$$

14. Le produit d'un nombre de 3 chiffres par 7 est terminé à droite par 931. Quel est ce nombre ?

15. Trouver un nombre de 2 chiffres sachant que la somme de ses chiffres est 15 et que si de ce nombre on retranche le nombre renversé, on trouve 27 pour différence.

16. En augmentant de 7 les deux facteurs d'un produit, on augmente le produit de 364. Trouver les deux facteurs sachant que leur différence est 5.

17. Dans une division, le quotient est 23, le reste 7 et la somme du dividende et du diviseur vaut 319. Quels sont le dividende et le diviseur ?

18. Un nombre a, inférieur à 1100, est divisé par b. Le quotient de la division vaut 37 et le reste 26. Quelles sont toutes les valeurs possibles pour a et b ?
(R : 1099-29 ou 1062-28 ou 1025-27)

19. On divise 321 par 19. De combien peut-on augmenter le diviseur sans changer le quotient ? De combien peut-on le diminuer ? (R : augmenter de 1, diminuer de 0)
20. Quels sont les nombres inférieurs à 100 qui, divisés par 14, donnent un reste égal au quotient ? (R : 90 75 60 45 30 15)
21. On considère les nombres 253 et 234. On les divise par leur différence. On demande de comparer les quotients et les restes. Généraliser.
(R : mêmes restes – différence des quotients = 1)
22. Dans une division qui ne se fait pas exactement, la somme du dividende et du diviseur est 50 328 et le quotient vaut 152. Déterminer toutes les valeurs possibles du dividende, du diviseur et du reste.
(R : 50 000 – 328 – 144 ou 50 001 – 327 – 297)
23. Dans quelle(s) base(s) le nombre 10 exprime-t-il un multiple de a) deux b) trois c) quatre ?
24. Dans une base inconnue, un nombre à deux chiffres se termine par zéro. Ce nombre est-il pair ? Expliquer la réponse à l'aide d'exemples concrets.
25. Rassembler une "banque d'exercices variés" sur le calcul écrit (ici sur des nombres entiers). Observer, analyser et critiquer si nécessaire plusieurs manuels d'école primaire.
26. Encore quelques soustractions pour s'exercer, par emprunts et par ajouts :
 - a) $(2704 - 1065)$ huit
 - b) $(2341 - 555)$ six
 - c) $10207 - 9589$ dans notre base dix

6. LES FAMILLES DE NOMBRES

6.1. Nombres pairs, impairs, multiples de, diviseurs de

Définitions

Un *nombre pair* est un nombre naturel qui est divisible par deux.

Un *nombre impair* est un nombre naturel qui n'est pas divisible par deux.

Un *nombre premier* est un nombre qui admet exactement 2 diviseurs: 1 et lui-même.

Ex: 3 est premier puisque $\text{div}3 = \{1; 3\}$

où la notation $\text{div } n$ désigne l'ensemble des diviseurs de n .

Rem: 1 n'est pas premier, il n'admet qu'un seul diviseur. 0 est pair.

Des nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Ex: 49 et 54 sont premiers entre eux.

49 et 56 ne sont pas premiers entre eux puisque 7 les divise chacun.

Soit a et b des nombres naturels.

On dit que a divise b ssi on peut trouver un nombre naturel n tel que $b = a \times n$

On note $a \mid b$ et on dit a divise b mais on peut aussi dire a est un diviseur de b

a est un facteur de b

ou en utilisant la relation réciproque :

b est un multiple de a

b est divisible par a

Ex: $3 \mid 6$ puisque $6=2 \times 3$
 $1 \mid 27$ puisque $27=27 \times 1$
 $0 \mid 0$ puisque $0=3 \times 0$ ou $0=6 \times 0 \dots$
 Par contre : 3 ne divise pas 5 puisqu'il n'y a aucun naturel n tel que $5=n \times 3$.
 0 ne divise pas 5 puisqu'il n'y a aucun naturel n tel que $5=n \times 0$.

Remarque:

La relation divise est définie à partir de la multiplication et non à partir de la division.

La propriété suivante constitue cependant un lien entre la division euclidienne et la relation "divise".

Propriétés :

Si le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors b divise a .

La réciproque n'est pas vraie. En effet $0 \mid 0$ mais la division $0:0$ est impossible.

Propriété de transitivité :

Si a divise b et b divise c alors a divise c .

(En effet : $\exists$ des naturels n et n' tels que $b=n \times a$ et $c=n' \times b$ donc $c=n' \times n \times a = N \times a$)

Ensemble des diviseurs d'un nombre

Ensemble des diviseurs de 12 = **div 12** = $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$4 \in \text{div } 8$ (4 est diviseur de 8, 4 divise 8)

$7 \notin \text{div } 8$ (7 n'est pas diviseur de 8)

$\text{div } 0 = \mathbb{N}$

Exercices

1. Trouver un nombre qui soit multiple de 5 sans être multiple de 10.
Trouver un nombre multiple de 10 sans être multiple de 5.
2. Trouver tous les naturels qui ont 56 pour multiple.
3. Pourquoi peut-on être sûr que 282828 est multiple de 7 (sans effectuer) ?
4. Trouver un naturel qui soit diviseur de 48 sans être diviseur de 12.
Trouver un naturel qui soit diviseur de 12 sans être diviseur de 48.
5. Trouver une méthode pour écrire tous les diviseurs de 72, puis tous ceux de 240.
6. Chercher tous les nombres premiers inférieurs à 100 en utilisant le procédé le plus court possible.

Crible d'Eratosthènes

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

6.2. Les caractères de divisibilité

Un caractère de divisibilité d'un nombre n est une propriété permettant de savoir si n est un diviseur d'un autre nombre sans avoir à effectuer la division de ce nombre par n . Il est très important de noter que ce caractère est dépendant de la base utilisée.

Caractères de divisibilité en base dix :

Un nombre naturel est divisible par

- i. 10 ssi le chiffre des unités est 0,
- ii. 5 ssi le chiffre des unités est 0 ou 5,
- iii. 2 ssi le chiffre des unités est pair,
- iv. 4 ssi le nombre constitué des chiffres des dizaines et des unités est divisible par 4,
- v. 25 ssi le nombre constitué des chiffres des dizaines et des unités est divisible par 25,
- vi. 100 ssi le nombre constitué des chiffres des dizaines et des unités est divisible par 100,
- vii. 8 ssi le nombre constitué des chiffres des centaines, des dizaines et des unités est divisible par 8,
- viii. 125 ssi le nombre constitué des chiffres des centaines, des dizaines et des unités est divisible par 125,
- ix. 1000 ssi le nombre constitué des chiffres des centaines, des dizaines et des unités est divisible par 1000,
- x. 3 ssi la somme de ses chiffres (vus d'es lors comme nombres) est divisible par 3,
- xi. 9 ssi la somme de ses chiffres (vus d'es lors comme nombres) est divisible par 9,
- xii. 11 ssi la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair (vus d'es lors comme nombres) et la somme de ses chiffres de rang impair (vus d'es lors comme nombres) est divisible par 11.

Enoncer ces règles à l'école primaire ne suffit pas; il faut expliquer pourquoi elles fonctionnent.

Exercices :

Appliquer les caractères de divisibilité ci-dessus et déterminer le plus possible de diviseurs de 31975, 111111, 1928355.

Exercices de réflexion (complément)

1. Un nombre de deux chiffres se termine par 1. Dans quelles bases est-il pair ?
2. Dans toute base, par quel(s) nombre(s) est divisible un nombre se terminant par :
 a) un zéro b) un double zéro c) un triple zéro

Les caractères de divisibilité dépendent de la base de numération.

Exercices

1. En base quatre, à quelle(s) condition(s) un nombre est-il divisible
 a) par 2 b) par 4 c) par 8
2. En base six, à quelle(s) condition(s) un nombre est-il divisible
 a) par 2 b) par 3 c) par 4
3. En base trois, à quelle(s) condition(s) un nombre est-il divisible
 a) par 2 b) par 3 c) par 4
4. En base huit, à quelle(s) condition(s) un nombre est-il divisible
 a) par 2 b) par 4 c) par 8

5. En base dix, à quelle(s) condition(s) un nombre est-il divisible
- | | | |
|-----------|-----------|----------|
| a) par 2 | b) par 4 | c) par 8 |
| d) par 3 | e) par 9 | |
| f) par 5 | g) par 25 | |
| h) par 11 | | |

Exercices de synthèse et de réflexion

6. Dans quelle(s) base(s) le nombre 20 exprime-t-il
a) un multiple de 2 ? b) un multiple de trois ? c) un multiple de quatre ?
7. Dans quelle(s) base(s) 60 est-il un multiple de a) trois ? b) quatre ?
8. Le chiffre de droite d'un nombre à deux chiffres est 1. Ce nombre est-il pair ou impair ? Justifier à l'aide d'exemples concrets.
9. Convertir : a) $(37)_{\text{huit}}$ en base 5 b) $(41)_{\text{six}}$ en base 2 c) $(101)_{\text{sept}}$ en base 3
d) $(1234)_{\text{cinq}}$ en base 12 e) $(11)_{\text{douze}}$ en base 4.
10. Ecrire le plus grand nombre à trois chiffres différents en base quatre; Quelle est sa conversion en base dix ?
11. $435 = 10 \cdot 40 + 35$. A partir de cette égalité, expliquer
a) quel est le reste de la division de 435 par 10
b) quel est le reste de la division de 435 par 40
12. Soit $19\,607 : 10$
a) Quel est le plus grand nombre à ajouter augmentant le quotient de 2 ?
b) Quel est le plus petit nombre à retrancher pour diminuer le quotient de 3 ?
13. Effectuer à l'aide d'un calcul écrit :
a) en base neuf : $278070 + 188543$ b) en base cinq : $4123 - 2340$
14. On donne 2 nombres divisibles par 7 ; on multiplie le premier par 6 et le second par 12.
Démontrez que la somme et la différence des nombres ainsi obtenus sont divisibles par 42
15. On considère 3 nombres consécutifs dont aucun n'est divisible par 4.
Démontrez que la somme de ces nombres est divisible par 2, par 3, mais pas par 4.
16. Quel chiffre faut-il écrire à la droite du nombre 4321 pour que le nombre obtenu soit divisible par 13 ?

Règles dans la base dix :

Un nombre naturel est divisible par

10 ssi son chiffre des unités est 0

5 ssi son chiffre des unités est 0 ou 5

2 ssi son chiffre des unités est 0; 2; 4; 6 ou 8.

4,25,100 ssi le nombre formé par les chiffres des dizaines et des unités est multiple de 4,25.100

8, 125, 1000 ssi le nombre formé par les chiffres des centaines, des dizaines et des unités est multiple de 8, 125, 1000

9 ssi la "somme de ses chiffres" est divisible par 9.

3 si la "somme de ses chiffres" est divisible par 3.

11 ssi la différence entre la "somme de ses chiffres de rang pair" et la "somme des chiffres de rang impair" est divisible par 11.

Méthodologie:

Méthodologie:
A l'école primaire, on met l'accent sur la méthode et pas sur les règles.

Ex: Soit 31975 en base dix.

On a $31975 = 3197 \times 10 + 5$

comme 10 est multiple de 5, 3197×10 l'est aussi par transitivité, il suffit donc de vérifier le chiffre

des unités (ici 5 convient).

Même raisonnement pour 2 et pour 10

On a $31975 = 319 \times 100 + 75$

comme 100 est multiple de 4, 3197×100 l'est aussi par transitivité, il suffit donc de vérifier le nombre formé des dizaines et des unités (ici 75 ne convient pas).

Même raisonnement pour 25 et pour 100

On a $31975 = 31 \times 1000 + 975$

comme 1000 est multiple de 125, 31×1000 l'est aussi par transitivité, il suffit donc de vérifier le chiffre formé des centaines, dizaines et unités (ici 975 ne convient pas).

Même raisonnement pour 8 et pour 1000

On a $31975 = 3 \times 10000 + 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 7 \times 10 + 5$

$$= 3 \times (M9+1) + 1 \times (M9+1) + 9 \times (M9+1) + 7 \times (M9+1) + 5 = M9 + (1+9+7+5)$$

il suffit donc de vérifier si $(1+9+7+5)$ est un multiple de 9

Même raisonnement pour 3.

Application des caractères de divisibilité : Produit et reste par une division donnée

Soient deux nombres n_1 et n_2 dont la division par d donne respectivement les restes r_1 et r_2 .

$$n_1 = d \times q_1 + r_1$$

$$n_2 = d \times q_2 + r_2$$

$$n_1 \times n_2 = \underbrace{d \times q_1 \times d \times q_2 + d \times q_1 \times r_2 + r_1 \times d \times q_2}_{\text{multiple de } d} + r_1 \times r_2$$

Seule la partie $r_1 \times r_2$ n'est pas clairement divisible par d . Cela nous permet donc d'affirmer que le reste de la division de $n_1 \times n_2$ par d est égal au reste de la division de $r_1 \times r_2$ par d .

C'est exactement le principe de la preuve par neuf; on compare le reste trouvé avec le produit de deux restes.

Cette propriété permettra la vérification d'un produit à l'aide des caractères de divisibilité et permet de justifier la « preuve par 9 » dans une multiplication.

Pour utiliser la "preuve par neuf" en classe, il est essentiel d'en expliquer l'origine, afin d'éviter de faire apprendre aux élèves une "recette tombée du ciel" : mieux vaut alors insister davantage sur les procédés plus simples tels que l'estimation ou l'utilisation de l'opération réciproque.

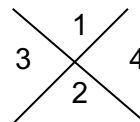
Disposition pratique de la preuve par neuf

Reste de la division par 9 du premier nombre : 1

Reste de la division par 9 du second nombre : 2

Reste de la division par 9 du produit des deux restes : 3

Reste de la division par 9 du produit trouvé : 4



Remarque :

La preuve par 9 ne permet pas de repérer une erreur de virgule ou d'alignement, type d'erreur pourtant fréquent ; il faut donc veiller à estimer également l'ordre de grandeur du résultat.

6.3. Décomposition d'un naturel en produit de facteurs

Factoriser un nombre naturel, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de nombres naturels appelés facteurs (ou diviseurs) de ce nombre.

Ex: $56 = 8 \times 7$ donc 56 a été factorisé en un produit des deux facteurs 8 et 7.

$56 = 2 \times 4 \times 7$ donc 56 a été factorisé en un produit de 3 facteurs 2; 4 et 7.

$56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ donc 56 est factorisé en un produit de 4 facteurs 2 et 7; le facteur 2 avec une occurrence de 3 (il apparaît 3 fois) et le facteur 7 avec une occurrence de 1.

Combien de manières de factoriser un nombre naturel peut-on trouver en utilisant uniquement des nombres premiers?

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre naturel supérieur à 2 s'écrit de manière unique comme un produit de facteurs premiers.

Ce résultat apparemment anodin est déjà présent dans les éléments d'Euclide et est indispensable à la preuve de bien des résultats.

Algorithme et disposition pratique :

Pour trouver cette factorisation en facteurs premiers, on fait une recherche en deux colonnes. On écrit le nombre dans la colonne de gauche et le plus petit facteur premier dans celle de droite. On effectue la division du nombre par ce facteur et on écrit le quotient dans la colonne de gauche. On recommence jusqu'à obtenir un nombre égal à 1. Les facteurs premiers se trouvent d'ailleurs dans la colonne de droite. Voici un exemple :

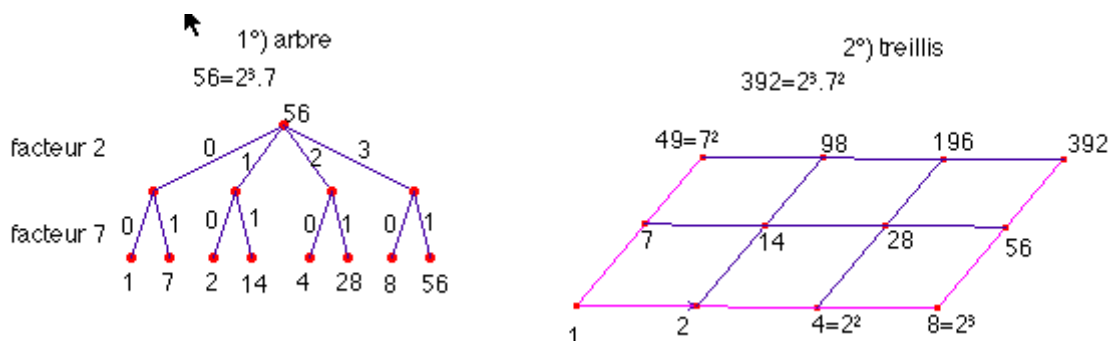
Ex:	56 2	ou	56 2 (moins utilisé)
	28 2		28 7
	14 2		4 2
	7 7		2 2
	1		1

L'ordre de la découverte des facteurs n'a pas d'importance. Néanmoins, une méthode systématique pour obtenir la décomposition d'un naturel en facteurs premiers consiste à essayer de diviser successivement le nombre proposé par les nombres premiers successifs.

La factorisation première d'un nombre permet de retrouver tous ses diviseurs et de les dénombrer.

Ex: $56 = 2^3 \times 7$ par conséquent, il y a 4×2 diviseurs puisque dans tout diviseur de 56 le facteur 2 peut apparaître au maximum 3 fois, soit 0, 1, 2 ou 3 fois et le facteur 7 au maximum 1 fois, soit 0 ou 1 fois.

Dispositions pratiques :



Remarque : Cette activité est l'occasion d'aborder la notion de puissance.

Autres définitions :

Un diviseur propre d'un naturel n est un diviseur de n qui ne lui est pas égal.

Un naturel n est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres.

Deux naturels sont dits amicaux si la somme des diviseurs propres de l'un est égale à l'autre.

6 est un nombre parfait (c'est même le plus petit) car $\text{div}6 = \{1, 2, 3, 6\}$ et $6 = 1 + 2 + 3$.

On peut vérifier que 220 et 284 sont amicaux.

On ignore s'il existe une infinité de nombres parfaits; on en connaît actuellement 47.

Les nombres parfaits pairs sont liés aux nombres premiers de Mersenne (i.e. les nombres premiers de la forme $2^n - 1$) et leur recherche est organisée depuis 1996 par

<http://www.mersenne.org>.

On ignore aussi s'il existe un nombre parfait impair, mais il est conjecturé que non.

Exercices

1. Trouver toutes les décompositions possibles de 120.
2. Décomposer 600 en facteurs premiers.
3. Décomposer 2800 en facteurs premiers. Trouver ensuite le nombre de diviseurs de 2800.
4. Trouver tous les diviseurs de 210.
5. Trouver le nombre de diviseurs de 48×90
6. Trouver trois nombres qui admettent exactement six diviseurs.

Si on sait depuis Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers, certains problèmes datant des Pythagoriciens sont les plus vieux problèmes irrésolus des mathématiques.

1. Existe-t-il une infinité de nombres parfaits? On conjecture que oui, mais on n'en connaît environ qu'une quarantaine.
2. Existe-t-il un nombre parfait impair? On conjecture que non.
3. Existe-t-il une infinité de nombres amicaux? On conjecture que oui et on en connaît plusieurs milliers.

6.4. Pgcd - ppcm

Remarque préliminaire : Les nombres considérés ici sont tous naturels.

Diviseurs communs et Plus Grand Commun Diviseur

Question :

Comment carreler une pièce de 420 cm sur 240 cm avec des dalles carrées les plus grandes possibles ?

1) Théorie adulte

Le PGCD de plusieurs nombres est leur plus grand commun diviseur.

Règle de l'algorithme par factorisation première :

1. Construire la factorisation première de chaque nombre.
2. Effectuer le produit des facteurs premiers communs affecté chacun de leur plus petite occurrence.

2) Méthodologie :

On peut placer les élèves dans une situation problème conduisant à calculer le PGCD

Méthodes utilisables

1. Ecrire la liste croissante des diviseurs de chaque nombre; repérer ensuite le plus grand nombre commun aux deux listes : c'est leur pgcd.
2. On écrit les décompositions en facteurs premiers des deux nombres. Le pgcd est obtenu en effectuant le produit de tous les facteurs qui figurent à la fois dans les deux décompositions, affectés de l'exposant le plus bas avec lequel il figure dans l'une des décompositions.
3. Algorithme d'Euclide (à éviter à l'école primaire)
Pour obtenir le pgcd de a et b ($a > b$), on divise a par b , puis b par le reste de la première

division, puis ce dernier reste par le second, etc... Au bout d'un certain nombre de divisions, on arrive à un reste nul. Le reste précédent est le pgcd.

On peut aussi faire une approche par manipulation : carrelage d'un rectangle à l'aide de dalles carrées les plus grandes possible; reproduction d'un parallélépipède rectangle à l'aide des cubes les plus grands possibles.

On peut ne pas utiliser l'algorithme et comparer les ensembles des diviseurs de chaque nombre. L'algorithme ne peut en aucun cas être donné comme une règle recette. L'instituteur doit guider les élèves pour qu'ils l'élaborent eux-mêmes. Il s'agit moins d'expliquer comment on applique la règle mais bien plus comment on l'obtient!

Remarque : deux nombres dont le pgcd est 1 sont dits premiers entre eux.

Exemple : 15 et 28.

Exercices

1. Quel est le pgcd de a) 375 et 60 ? b) 25 et 8 ? Utiliser plusieurs méthodes.
2. 1789 et 1961 sont-ils premiers entre eux ?

Multiples communs et Plus Petit Commun Multiple

Exemples : Trouver le ppcm de 24 et 36, de 375 et 60, de 2916 et 576.

1) Théorie adulte

Le PPCM de plusieurs nombres est leur plus petit commun multiple.

Règle de l'algorithme par factorisation première:

1. Construire la factorisation première de chaque nombre.
2. Effectuer le produit des facteurs premiers apparaissant, affecté chacun de leur plus grande occurrence.

2) Méthodologie:

On peut placer les élèves dans une situation problème conduisant à calculer le PPCM .

Exemple : « Quelle taille possède le plus petit mur carré possible construit avec des briques de 420 mm sur 240 mm ? »

Méthodes utilisables

1. On écrit le début des listes croissantes des multiples de chaque nombre. On peut alors repérer le plus petit nombre commun aux deux listes : c'est leur ppcm.
2. On écrit les décompositions en facteurs premiers des deux nombres. Le ppcm est obtenu en faisant le produit de tous les facteurs qui figurent dans l'une ou dans l'autre des deux décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lequel il figure dans l'une des décompositions.

On peut aussi faire une approche par manipulation : construction d'un mur carré le plus petit possible à l'aide de briques identiques de section rectangulaires, construction d'un cube le plus petit possible avec des briques identiques.

On peut ne pas utiliser l'algorithme et comparer les ensembles des multiples de chaque nombre ou se servir d'un repérage des multiples sur une droite graduée.

Ici aussi, l'algorithme ne peut en aucun cas être donné comme une règle recette. L'instituteur doit guider les élèves pour qu'ils l'élaborent eux-mêmes. Il s'agit moins d'expliquer comment on applique la règle mais bien plus comment on l'obtient!

Remarque : théorème liant PGCD et PPCM :

$$\text{PGCD}(x,y) \times \text{PPCM}(x,y) = x \times y$$

Exemple :

Puisqu'on a calculé que $\text{PGCD}(420,240) = 60$, alors $60 \times \text{PPCM}(420,240) = 420 \times 240$

$$\text{PPCM}(420,240) = 420 \times 240 / 60 = 420 \times 4 = 1680$$

Exercices

1. Quel est le PPCM a) de 375 et 60 ? b) de 2916 et 576 ?
2. Que vaut le PPCM de deux nombres premiers entre eux ?
3. Un enfant range toutes les petites voitures dont il dispose.
Il les met par rangées de 6; il lui en reste 3. Il les met par rangées de 5; il n'en reste pas.
a) S'il les range par 3, en reste-t-il ? (Justifier)
b) S'il les range par 2, en reste-t-il ? (Justifier)
c) Quel peut être le nombre de voitures de cet enfant sachant qu'il en a en tout moins de 100?
4. Le PPCM de 56 et d'un autre nombre est 280. Quel peut être ce nombre ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Le PGCD de 54 et d'un autre nombre est 9. Quel peut être ce nombre ? Donner 4 réponses possibles.

Complément : Combien existe-t-il de nombres premiers ?

Lorsqu'on progresse dans la suite des nombres naturels, les nombres premiers se font de plus en plus rares. Une question se pose alors logiquement : existe-t-il une infinité de nombres premiers ou en existe-t-il un plus grand possible ?

Euclide est le premier à avoir répondu à la question; c'est la proposition 20 du Livre IX de ses éléments.

Théorème d'Euclide : Il existe une infinité de nombres premiers

Faisons-en une démonstration par l'absurde.

Supposons qu'il existe n nombres premiers $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Montrons que $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ doit être premier aussi; cela constituerait une contradiction puisque N serait un nombre premier supérieur à p_n .

Le reste de la division de N par p_i est égal à 1 quel que soit i .

N n'est donc pas divisible par un nombre premier différent de N , il est donc lui aussi premier.

Exercices supplémentaires

1. Les nombres x et y ont le même reste non nul dans la division par 17.
($x + y$) est-il divisible par 17 ?
2. Le quotient de la division de 750 par un certain nombre est 16, le reste est 14. Quel est le diviseur ?
3. Quels sont les nombres inférieurs à 100 qui, divisés par 12, donnent 5 pour reste ?
4. Quels sont les nombres inférieurs à 200 qui, divisés par 15, donnent 10 pour reste ?
5. Quels sont les nombres qui peuvent être le dividende d'une division dont le diviseur est 6 et le quotient 15 ?
6. Sachant que $4027 = 65 \times 61 + 62$, dire quel est le quotient de 4027 par 65 ? et par 61 ?
7. Sachant que $1161182 = 1023 \times 1134 + 1100$, dire quel est le quotient de 1161182 par 1134 ? et par 1023 ?
8. Quels sont les nombres qui peuvent être le dividende d'une division dont le diviseur est 6 et le quotient 10 ?
Même question pour le diviseur de 4 et le quotient 15.
9. Diviser 42 par 10.
a) Déterminer le plus grand nombre que l'on peut ajouter au dividende sans changer le quotient.
b) Déterminer le plus grand nombre que l'on peut retrancher du dividende sans changer le quotient
10. Dans une division par 124 le reste est 69
a) quel est le plus grand nombre que l'on peut ajouter au dividende en augmentant le quotient de 5 unités ?
b) quel est le plus petit nombre à retrancher du dividende pour diminuer le quotient de 3 unités ?

11. En divisant un nombre par 5 d'une part et par 3 d'autre part, on obtient toujours 2 comme reste. Quelles sont les valeurs possibles pour ce nombre ?
12. En divisant 489 et 418 par un même nombre, on obtient respectivement pour restes 9 et 10. Quel peut être ce nombre ?
Même question pour 3086, 2369 et 4131 dont les restes respectifs sont 20, 17 et 15
13. Deux livres ont respectivement 352 et 480 pages. Ils sont formés de fascicules comportant le même nombre de pages, ce nombre étant supérieur à 16. Quel est le nombre de fascicules de chaque livre ?
14. Deux feuilles de papier rectangulaires mesurent l'une 43,2 cm sur 36 cm, l'autre 60 cm sur 48 cm. On doit couvrir ces feuilles de carrés égaux, les plus grands possibles. Que mesurent ces carrés ?
15. Quels sont les restes obtenus en divisant 78927 et 462627 par 2 ?, par 3 ?, par 4 ?, par 5 ?, par 8 ?, par 9 ?, par 25 ?, par 125 ?
16. Des trams partent d'une station le long de 3 lignes différentes. Les départs se faisant respectivement toutes les 10 min, 15 min, 18 min. Les premiers trams sont partis ensemble à 6h du matin. A quelle heure adviendra un nouveau départ simultané ?
a) pour la première fois ?
b) pour la cinquième fois ?
17. Quels sont les nombres écrits uniquement avec des chiffres 3 qui sont divisibles par 9 ?
Même question pour les nombres écrits uniquement avec le chiffre 6 ? Et avec le chiffre 7 ?
18. Quel nombre divisé par 12, 15 et 25 donne
a) le même reste 7 ?
b) respectivement les restes 5, 8 et 18 ?
19. Par quel(s) chiffre(s) doit-on remplacer x dans les nombres suivants pour remplir les conditions indiquées ?
a) $37x2$ multiple de 4
b) $65x8$ multiple de 8
c) $9x63$ multiple de 9
d) $92x5$ multiple de 9 et 25
e) $41x7x$ multiple de 3
f) $7x4$ multiple de 4 et 3
20. Sachant que $A = \mu 12 + 5$ et que $B = \mu 12 + 3$, déterminer les restes de la division par 12 de
a) $A + B$ b) $4A - B$ c) A^2
21. Montrer que la somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5
22. Montrer que la somme de 2 nombres pairs consécutifs n'est pas divisible par 4
23. Montrer que la somme de 2 nombres consécutifs non divisibles par 3 est divisible par 3

Exercices récapitulatifs

1. Ecrire le nombre dix-neuf dans les bases deux à douze.
2. Convertir : a) $(25)_{\text{six}}$ en base 4 b) $(211)_{\text{trois}}$ en base 6 c) $(11011011)_{\text{deux}}$ en base huit
3. Dans quelle base soixante s'écrit-il a) 330 ? b) 220 ?
4. Calculer : a) $(24)_{\text{cinq}} + (43)_{\text{cinq}} =$ b) $(72)_{\text{huit}} - (35)_{\text{huit}} =$ c) $(2031)_{\text{quatre}} \text{ fois } (12)_{\text{quatre}} =$
d) $(52)_{\text{six}} : (4)_{\text{six}} =$ e) $(212)_{\text{trois}} : (11)_{\text{trois}} =$
5. Calcul écrit en base six :
a) $2354 + 534 =$ b) $2354 \times 5 =$ c) $2304 - 1355 =$
6. Ecrire le plus petit nombre à trois chiffres différents en base cinq. Quelle est sa conversion en base deux ?
7. $(2101)_{\text{trois}}$ est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 4 ? (Justifier sans faire le calcul)
8. Dire dans quelle(s) base(s) un nombre à 2 chiffres se terminant par 2 / par 3 peut être pair / impair.

9. $163 = 20 \cdot 8 + 3$. A partir de cette égalité, trouver le reste de la division de 163 par 20 puis par 8.

10. Énoncer et justifier les caractères de divisibilité suivants dans la base indiquée :

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) par quatre en base huit | b) par trois en base douze |
| c) par neuf en base six | d) par deux en base trois |
| e) par huit en base quatre | |

11. Trouver le nombre de diviseurs de 288.

12. Trouver le pgcd et le ppcm de 96 et 324.

7. LES NOMBRES NEGATIFS

Définition : $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

On peut établir une bijection entre les éléments de $\mathbb{Z}$ et les points de graduation d'une droite.

En mathématique, la découverte des nombres négatifs est liée au calcul algébrique. Le premier usage connu de ces nombres remonte au mathématicien hindou Brahmagupta, au VII^e siècle de notre ère. Longtemps, les mathématiciens ont essayé d'éviter les calculs avec de tels nombres, parce qu'on **ne peut pas**, comme pour les positifs, **imaginer qu'ils représentent des quantités**.

Méthodologie.

Pour introduire les nombres négatifs, il faut insister sur le fait qu'on compte des situations opposées. Exemple: On compte séparément:

- * les points gagnés et les points perdus dans un jeu.
- * les degrés au-dessus du point de gel et ceux en dessous.
- * les étages au-dessus du rez-de-chaussée et ceux en dessous.
- * les bénéfices et les pertes....

Avantages et inconvénients: La situation points gagnés (concrétisés par un jeton vert) et points perdus (concrétisés par un jeton rouge) permet de rester dans l'ensemble des entiers, il en est de même pour les étages alors que les degrés et les sommes d'argent s'expriment avec des nombres à virgule. Le thermomètre quant à lui fournit une représentation des nombres sur une droite.

Les opérations.

Cette notion n'est en général pas abordée à l'école primaire.

Il ne faut pas vouloir aller trop loin, elle sera vue en détail dans le secondaire.

Par exemple: exploitation de la situation points gagnés points perdus pour introduire addition et soustraction.

Addition: on a fait 2 parties, il faut faire le décompte final sur le principe que les points gagnés compensent les points perdus.

	Laetitia	Grégory	Kévin	Florence
1 ^{ère} partie	gagne 3pts	perd 5pts	gagne 5pts	perd 8pts
Bilan final.	Gagne 5pts	perd 11pts	gagne 2pts	perd 5pts
Notation	$3^+ + 2^+ = 5^+$	$5^- + 6^- = 11^-$	$5^+ + 3^- = 2$	$8^- + 3^+ = 5^-$

Constatations: les jetons de même couleur s'ajoutent et gardent leur couleur. Les jetons de couleur différente se soustraient et prennent la couleur de ceux où il y en avait le plus.

Soustraction:

Dans le courant de la partie, on rencontre une case obligeant à rendre des points tantôt gagnés tantôt perdus. Ex: J'ai 10pts gagnés et j'ai 5 pts perdus en arrivant à la case et je tire une des consignes suivantes:

rendre 7 points gagnés: $\Rightarrow 10^+ - 7^+ = 3^+$

rendre 12 points gagnés: $\Rightarrow 10^+ - 12^+ = 2^-$

rendre 3 points perdus: $\Rightarrow 5^- - 3^- = 2^-$

rendre 8 points perdus: $\Rightarrow 5^- - 8^- = 3^+$

Constatations: Soustraire des jetons d'une couleur, c'est la même chose qu'ajouter des jetons de l'autre couleur.

8. LES FRACTIONS

8.1. Vocabulaire

Une fraction est un rapport entre deux nombres entiers (naturels à l'école primaire) appelés respectivement numérateur et dénominateur, le dénominateur devant être différent de zéro.

$$\text{fraction} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \quad a, b \text{ naturels et } b \neq 0$$

Le vocabulaire utilisé au début sera le plus logique possible :
« deuxième, troisième, quatrième » au lieu de « demi, tiers, quart »

Remarque sur la définition

La notion de fraction est plus restreinte que celle de rapport, car un rapport peut également lier des grandeurs entre elles.

Introduction

La notion de fraction est abordée dès la maternelle dans des circonstances de la vie quotidienne : partages simples; certains mots du vocabulaire courant seront alors utilisés : demi ou moitié, tiers, quart.

L'introduction des fractions se fait sur une tarte, une feuille, un objet et pas sur un nombre.

On insiste sur les "morceaux égaux pour ne pas faire de jaloux".

Les conventions de notation sont introduites progressivement :

le couteau représentera la barre de fraction

le nombre de parts s'écrit en dessous du couteau / barre

Ces conventions auront comme support une histoire (Je coupe 1 ... en ... morceaux).

Lors d'une deuxième leçon, on travaillera sur le numérateur.

A l'aide d'une histoire, on notera le(s) morceau(x) mangé(s) au-dessus du couteau / barre

Remarque : C'est seulement lorsque le concept de fraction sera bien installé que l'on commencera les techniques de calcul.

Quelques remarques méthodologiques

- Retourner au matériel, à la signification concrète des fractions
- Utiliser plusieurs matériels différents, permettant des visualisations différentes
- Insister sur l'étalon utilisé
- Faire remarquer la différence entre ce que l'on dit et ce qu'on écrit
- Verbaliser : faire justifier les différentes réponses

Types d'exercices

Reconnaître les parts égales. - Associer la fraction au dessin. - Partager en parts égales - Travailler les passages mots / action / écriture.

Evolution de la notion

On introduit les fractions en temps qu'opérateurs agissant sur une grandeur continue. L'unité à fractionner est alors assez naturellement la tarte entière, le segment entier...

Exemple : Partage d'objets (tartes, surfaces, segments, volumes, masses,...)

Ensuite on envisage toujours la fraction opérateur mais agissant cette fois sur des grandeurs discrètes. Il faut alors accepter qu'un sac de 8 billes constitue une entité considérée comme unité à fractionner. Ex: $\frac{1}{4}$ de huit billes = quatre billes.

C'est l'utilisation de bandelettes qui permettra de passer progressivement à la position d'une fraction (vue comme nombre rationnel) sur la droite numérique (pas facile).

Pour chaque grandeur étudiée (longueur, capacité, ...) on prendra d'abord le $\frac{1}{2}$ et le $\frac{1}{4}$ de l'unité (fractions binaires), plus tard les $\frac{1}{10}$ ^e, $\frac{1}{100}$ ^e ... de l'unité (fractions décimales).

Puis on étend l'opérateur à des fractions supérieures à l'unité.

C'est seulement après de nombreuses manipulations visant à comprendre l'aspect fraction opération qu'on pourra observer le résultat obtenu et amener ainsi les élèves vers la fraction nombre. La comparaison résultat et unité fera envisager l'aspect fraction rapport conduisant à la notion de pourcentage.

Les difficultés.

Les fractions prennent différents sens:

- un rapport entre 2 nombres (naturels en primaire) ou 2 grandeurs.
- une opération.
- un nombre, résultat d'une opération.

Ces 3 sens différents posent un problème méthodologique. La difficulté provient de ce qu'on passe insensiblement d'un aspect à l'autre sans toujours être conscient des différences introduites.

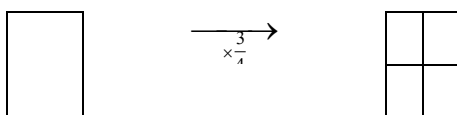
Exemple :

"Prendre les 3 quarts d'une tarte" signifie "couper la tarte en 4 parties égales et en prendre 3". Il s'agit là de la fraction opérateur qui agit sur une grandeur.

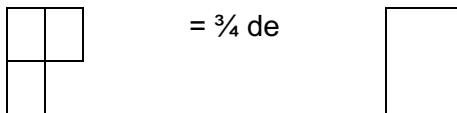
La partie de tarte que l'on a prise se désigne par "les $\frac{3}{4}$ de la tarte". Cette fois il s'agit donc du résultat de l'opération "prendre les 3 quarts d'une tarte".

Généralement on fait un aller retour entre la tarte unitaire et ses 3 quarts qui établit un rapport qualifié également de $\frac{3}{4}$.

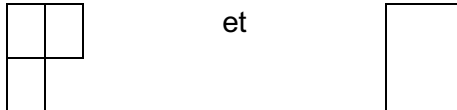
Dans la représentation suivante sous forme de graphe apparaît l'opérateur: $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$



le résultat :



et enfin le rapport de $\frac{3}{4}$ entre



D'autre part les fractions opérateurs agissent généralement sur des grandeurs et non sur des nombres. Ces grandeurs peuvent être continues (tarte, segment, ...) ou discrètes (sac de huit pommes, ...).

8.2. Fractions équivalentes

Définitions

Des fractions équivalentes sont des fractions exprimant des quantités égales.

Une fraction irréductible est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Les nombres du type : $\frac{0,1}{3}$; $\frac{3/4}{1/2}$; $\frac{\sqrt{2}}{5}$; $\frac{1+2}{4}$; ... sont appelés "fractions généralisées".

Méthodologie

On montre par exemple sur un gâteau que $1/2 = 2/4$ (2 petits morceaux correspondent à un grand morceau), ou que $2/3$ est pareil à $4/6$ (comparaison des morceaux), ou que $3/5$ est pareil à $6/10$...

Remarque : ne pas se limiter à 2 et 4 pour éviter les généralisations hâtives (rôle du 2)

On explique ce que cela veut dire : certaines phrases pourront être écrites.

On présente souvent une sorte de ruban (ou une règlette) pour des dénominateurs supérieurs à 6 (exemple 12).

Une même partie du ruban peut s'exprimer par des fractions différentes (mais équivalentes).

Il est intéressant de proposer des découpages variés (Puzzles de fractions par exemple¹), de retourner au sens de la notion de fraction;

Quelques écueils à éviter²

Eviter de donner des exemples tirés de la vie quotidienne utilisant des fractions qui en fait ne se rencontrent jamais.

Eviter les arrondis du type $1/3 = 0,33$ qui peuvent faire croire que $1/3$ est un nombre décimal.

De la même façon, il est inutile de poser un problème décimal sous forme fractionnaire.

Par contre, beaucoup de problèmes de courses au magasin peuvent conduire à la division (ou à la multiplication) de décimaux par des fractions, et notamment les problèmes de pourcentages.

Les fractions prennent naissance comme parties d'un tout.

A un certain stade, on passe aux quantités ou mesures des choses (cf. fractions équivalentes).

A ce moment-là, on introduit des fractions plus grandes que l'unité.

Il est important d'expliquer que $1/2$ et $2/4$ représentent le même nombre, mais sont des fractions différentes, ce qui utilise la notion de nombre rationnel.

Eviter d'aborder les opérations sur les fractions à l'aide de procédés à suivre non expliqués, ou qui ne sont pas toujours respectés car ils ne permettent pas de résoudre tous les calculs.

Il n'est pas toujours utile de simplifier systématiquement les fractions (exemple : pourcentages)

8.3. Opérations sur les fractions

Préliminaire : comparaison de fractions.

Une opération sur des fractions ne peut être envisagée avant que celles-ci n'aient pris le sens de nombre. Il faut donc être très prudent pour ne pas imposer aux élèves des techniques de calcul qui pour lui n'ont aucun sens.

¹ Ceci peut être une idée d'introduction d'activité, de matériel à proposer)

² Hilton P. "Devons-nous encore enseigner les fractions ?", document du CREM paru en août 1996

Ex: Il ne sert à rien qu'un élève puisse, uniquement grâce à une technique acquise par un drill, effectuer une addition du type $\frac{4}{17} + \frac{5}{23} = \dots$

Il convient avant d'effectuer des opérations sur les fractions, d'être capable de les comparer. C'est à dire d'aboutir à une sériation des fractions indispensable pour qu'elles deviennent de "vrais" nombres.

On amènera les élèves à comprendre que:

- si on augmente (resp. diminue) le dénominateur, la fraction (nombre) diminue (resp. augmente) puisque les parts sont plus petites (resp. plus grandes).
- si on augmente le numérateur (resp. diminue) la fraction augmente (resp. diminue) puisqu'on prend plus (resp. moins) de parts.
- on ne peut comparer des fractions que lorsqu'elles ont un terme commun.
- généralement, on s'arrange pour fractionner les parts de chaque fraction de façon à ce que toutes les parts soient égales. Il faut donc procéder à une réduction au même dénominateur.

Addition et soustraction de fractions

Introduction possible : on rassemble des morceaux de tarte et on cherche la fraction unique qui représente l'ensemble.

Exemples : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} =$
 $32/36 + 23/30 = \dots$

Remarques :

A l'école primaire, on ne dépasse en général pas l'unité.

Pour chercher le dénominateur commun, on prend le plus grand, que l'on multiplie jusqu'à ce qu'il soit aussi un multiple du premier.

De préférence, le dénominateur commun sera le plus petit pour éviter les erreurs.

Quelques procédés : Associer une image, un geste, une phrase, une histoire; utiliser du matériel comme le fractionary,...

Règle : Pour additionner des fractions : (soustraire)

- 1) On simplifie chaque fraction
- 2) On trouve un dénominateur commun
- 3) On transforme chaque fraction
- 4) On additionne les numérateurs (ou on soustrait)
- 5) On simplifie si c'est nécessaire

Multiplication et division de fractions

Multiplication d'une fraction par un nombre (sous-entendu naturel) : exemple : $\frac{2}{15} \times 3$, $\frac{2}{7} \times 3$

Multiplication d'un nombre par une fraction : exemple : $7 \times \frac{3}{4}$

Multiplication d'une fraction par une fraction : exemple : $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ ou $\frac{6}{7} \times \frac{1}{2}$ puis $\frac{1}{7} \times \frac{2}{5}$

Remarque : $\frac{2}{15}$, 7 et $\frac{2}{3}$ sont des opérateurs; on n'insiste pas sur la commutativité, elle apparaîtra au fur et à mesure.

Méthodes :

- Rapports de surfaces (exemple : $\frac{2}{3} \times \frac{5}{8}$) : attrimaths, fractionary, quadrillages,...
- Rapport de réglettes (exemple $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de 8)

Division d'une fraction par un nombre : exemples : $\frac{4}{9} : 2$, $\frac{5}{8} : 3$

Division d'une fraction par une fraction

(fort abstrait pour les enfants, vu au début du secondaire)

Procédés possibles pour introduire la division d'une fraction par une fraction :

Réduire au même dénominateur puis diviser le premier numérateur par le deuxième numérateur.

Utiliser les opérateurs et trouver les opérateurs réciproques

$\times \frac{3}{20}$ se décompose en 2 opérateurs " :20" et " $\times 3$ "

de réciproques " :3" et " $\times 20$ " c'est-à-dire : $\frac{3}{20}$ ou $\times \frac{20}{3}$

Utiliser les réciproques d'une multiplication :

exemple $\frac{2}{3} \times 9 = 6$ devient $9 = 6 : \frac{2}{3}$ c'est-à-dire $9 = 6 \times \frac{3}{2}$

Exercices

1. Calculer (la réponse est une fraction irréductible) :

a) $\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + 3\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) : \left(1 - \frac{1}{5}\right)} =$

b) $\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5}} : \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}} =$

c) $1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} =$

d) $\frac{2}{\frac{3}{4}} =$

e) $\frac{\frac{2}{3}}{4} =$

f) $4 - \frac{2}{3} =$

g) $\frac{4-2}{3} =$

2. Prendre une fraction

1°) d'un nombre (quantité discrète)

a) 4 est quelle fraction de 6 ?

b) 20 est quelle fraction de 15 ?

c) 1 est quelle fraction de $\frac{2}{3}$?

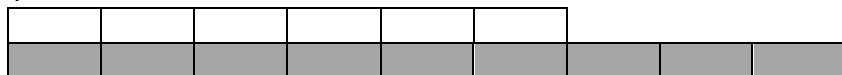
d) $\frac{3}{5}$ est quelle fraction de $\frac{5}{3}$?

e) que valent les deux tiers de $\frac{2}{3}$?

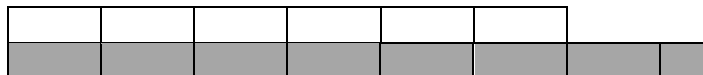
2°) d'une grandeur continue (segment ou bande)

a) Quelle fraction du segment noir vaut le segment blanc ?

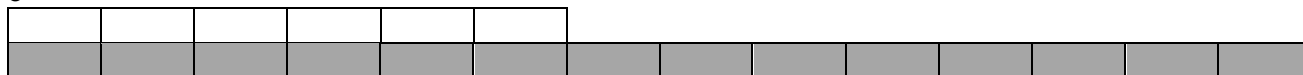
1



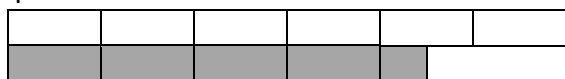
2



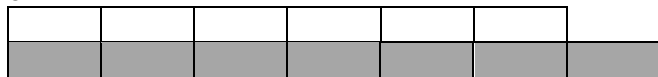
3



4

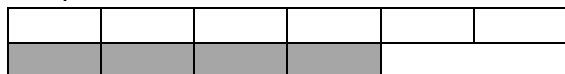


5



b) Quelle fraction du segment blanc vaut le segment noir ?

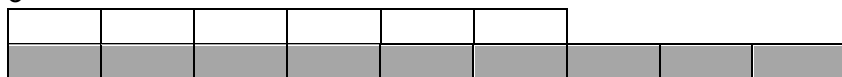
1



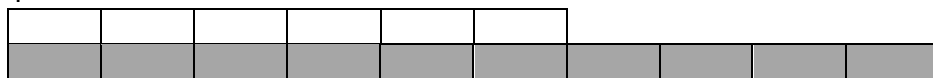
2



3



4



3. Par quelle fraction faut-il multiplier un nombre pour :

a) l'augmenter de son tiers ?

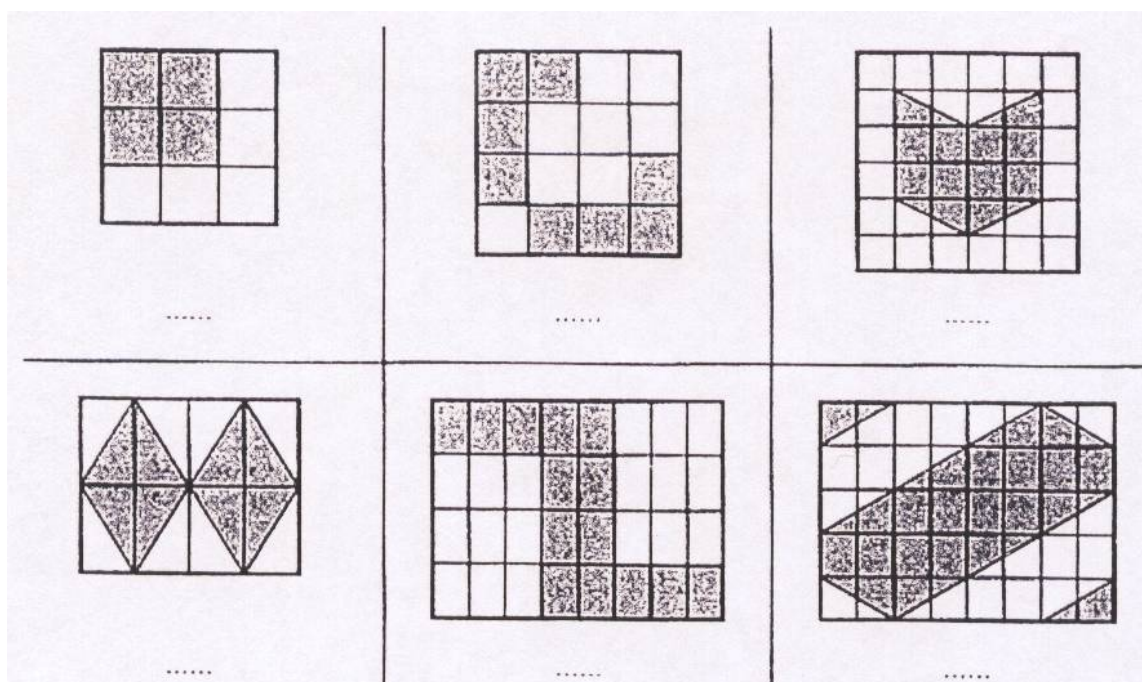
b) en prendre la moitié du tiers ?

c) le diminuer de ses deux cinquièmes ?

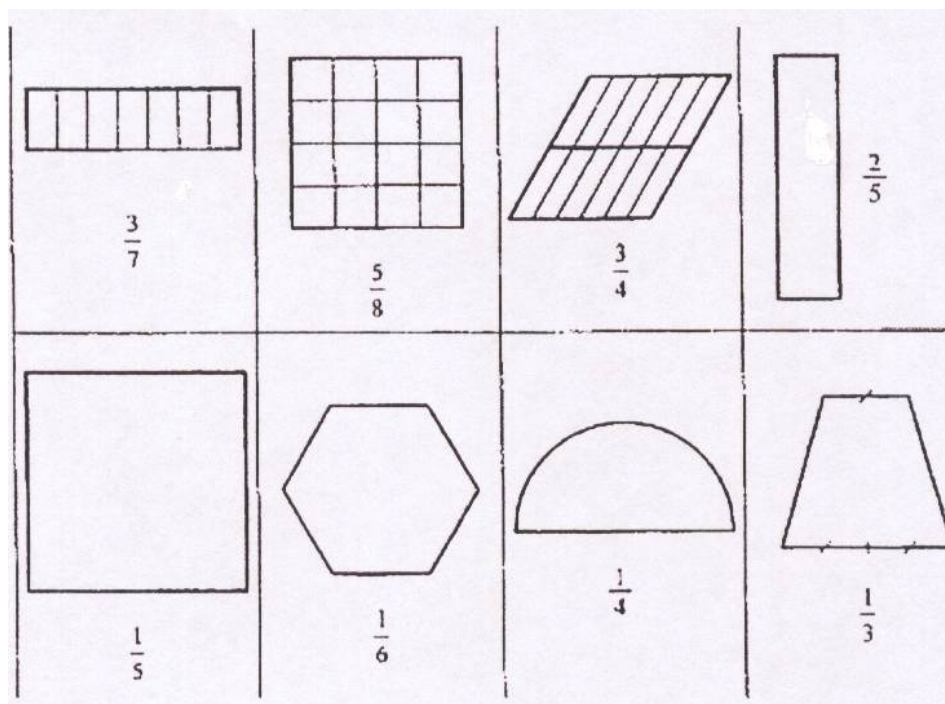
d) le diviser par quatre ?

e) le doubler en lui ajoutant encore sa moitié ?

4. Quelle fraction de chaque figure représente la partie hachurée ?

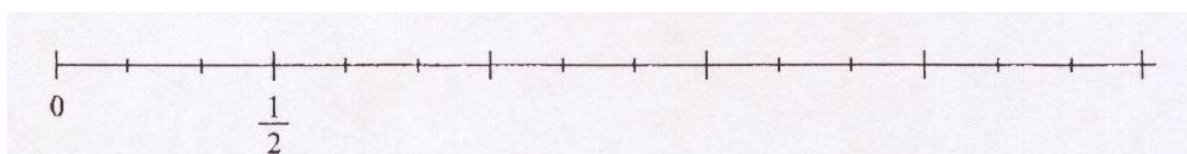


5. Sur chaque figure, colorier une partie de la surface totale correspondant à la fraction donnée



6. Sur une droite graduée, placer les points B, R, E et F dont les abscisses sont :

$$B : \frac{2}{3} \quad R : \frac{7}{6} \quad E : \frac{5}{2} \quad F : \frac{4}{5}$$



7. Voici les exemples qui ont servi à illustrer la simplification d'une fraction :

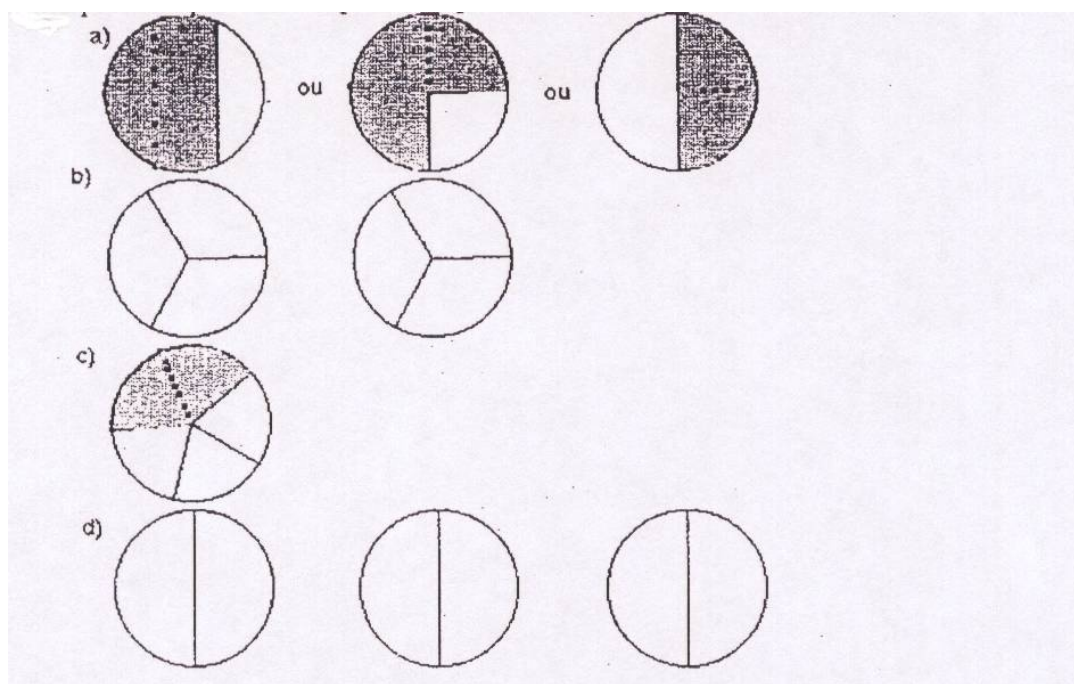
$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}; \quad \frac{13}{39} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}; \quad \frac{24}{48} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}. \quad \text{Analyser l'erreur suivante : } \frac{18}{27} = \frac{1}{2}.$$

Quelles conclusions en tirer quant au choix des exemples ?

8. Entourer la fraction qui n'est pas égale aux autres :

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \frac{90}{128} ; \frac{60}{72} ; \frac{50}{60} ; \frac{40}{48} ; \frac{30}{36} ; \frac{130}{156} \\ \text{b)} \quad \frac{25}{150} ; \frac{15}{60} ; \frac{5}{30} ; \frac{30}{180} ; \frac{20}{120} ; \frac{50}{300} \end{array}$$

9. Que pensez-vous des réponses suivantes à la question « que représente les $\frac{2}{3}$ d'un disque ? ». Indiquez pour chaque cas l'interprétation que l'élève a donné à « prendre les $\frac{2}{3}$ de »



10. Placer sur une droite graduée et justifier : par utilisation de bandes et par utilisation de règles

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$

b) $\frac{24}{48}, \frac{6}{8}, \frac{12}{24}, \frac{12}{48}, \frac{12}{18}, \frac{12}{9}, \frac{96}{48}$ et $\frac{100}{24}$

11. Exprimer sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction réduite $\frac{12}{9}$ et $\frac{100}{24}$ par utilisation a) de bandes b) d'une droite graduée c) de règles

12. Ranger les nombres suivants par ordre croissant : $\frac{80}{56}, \frac{7}{5}, \frac{99}{70}, \frac{8}{7}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$

13. Ecrire sous forme de fraction irréductible le nombre
$$-\frac{4}{7} + \frac{2}{9} - 5$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{72}$$

Complément : fractions égyptiennes.

Les mathématiques égyptiennes possèdent une caractéristique qu'on ne retrouve pas ailleurs : à l'exception de $\frac{2}{3}$, seules les fractions ayant un numérateur égal à 1 sont admises.

Ainsi $11/12$ s'écrit par exemple $1/2 + 1/3 + 1/6$ (ces décompositions ne sont pas forcément uniques). Si ce principe semble rendre les fractions encore plus difficile à comprendre, en réalité, il devient extrêmement simple d'additionner et de multiplier des fractions. De nombreux exemples de ce concept se trouvent sur le papyrus Rhind (1650 av J.C.) recopié par le scribe Ahmès d'un document datant de 2000 av J.C.

Le problème type est de transformer une de nos fractions en fraction égyptienne. Dans son Liber Abaci, en 1202, Fibonacci propose un algorithme. Celui-ci sera redécouvert par James Sylvester en 1880 qui démontra que cette algorithme fonctionne dans tous les cas.

Comment fonctionne-t-il ?

1. On rend la fraction n/d irréductible.
2. On cherche la plus grande fraction $1/a$ qui soit inférieure à n/d .
Il est d'ailleurs plus facile de rechercher le nombre entier a tel que $a > d/n > a-1$
3. Puisque $n/d = 1/a + n'/d'$, on recommence avec n'/d' .

On poursuit cette procédure jusqu'à ce que n' soit égal à 1.

Ce que Sylvester a prouvé, c'est que quelle que soit la fraction de départ, le numérateur n' est strictement inférieur à n . On est ainsi certain d'arriver au but en n étapes maximum.

Exemple

Comment transformer $27/30$ en fraction égyptienne ?

1. $27/30 = 9/10$,
2. $2 > 10/9 > 1$,
3. $9/10 = 1/2 + 4/10$.
1. $4/10 = 2/5$,
2. $3 > 5/2 > 2$,
3. $2/5 = 1/3 + 1/15$ et c'est fini.

En résumé : $27/30 = 1/2 + 1/3 + 1/15$

Exercice : Transformer $34/36$, $15/18$, $22/27$, $4/17$, $3/1247$ et $80/81$ en fractions égyptiennes.

9. LES NOMBRES A VIRGULE

Questions préliminaires

1. Qu'est-ce qu'une virgule ?
2. Des feuilles étant disponibles, construire un paquet de 12,58 feuilles sans utiliser la latte.
(autre matériel possible : pailles)

Introduction possible

Division écrite de 763 par 3 avec matériel (post-it, allumettes, personnages)

9.1. Notion de virgule

Historique

Jusqu'à l'an 1500, le nombre à virgule n'existe pas, on utilise que des fractions.

C'est le Brugeois Simon Stévin qui invente la virgule et les nombres décimaux.

Il faudra attendre près de trois siècles pour que ce concept soit couramment utilisé. L'appellation « nombres décimaux » pose problème dans l'apprentissage de ceux-ci.

En effet, l'adjectif décimal caractérise pour l'enfant l'usage d'un nombre en base 10. Ainsi 278 est un nombre décimal. Dans un premier temps, il faudra donc utiliser l'appellation de « nombres à virgule ».

Il y a trois types de nombres décimaux :

1. Les nombres décimaux limités qui s'écrivent par un nombre fini de chiffres non nuls comme 0,1 et 12,255. Ils peuvent s'écrire comme une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.
2. Les nombres décimaux illimités périodiques qui s'écrivent par un nombre infini de chiffres non nuls, mais se répétant invariablement à partir d'un certain rang. Exemples : 0,333...3...; 3,142857...142857.... Ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.
3. Les nombres décimaux illimités non-périodiques qui s'écrivent par un nombre infini de chiffres non nuls tout en ne se répétant pas invariablement à partir d'un certain rang. Exemples : π ; $\sqrt{2}$; 0,123456789101112.... Ils ne peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.

L'utilisation de nombres à virgule impose de considérer la possibilité d'avoir des rangs négatifs dans l'abaque. Par exemple : $21,45 = 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$.

Nombre décimal et nombre à virgule

Les nombres à virgule résultent d'un fractionnement de l'unité par les puissances successives de la base. En particulier, si la base est dix, l'unité est fractionnée en puissances successives de dix. (dixième, centième, millième...). On les appelle "nombres (fractionnaires) décimaux" souvent sans spécifier "fractionnaire".

Cette terminologie du système décimal n'est pas satisfaisante car elle peut prêter à confusion. En effet: on parle de nombres décimaux tantôt pour désigner un nombre écrit dans la base dix, en numération décimale, tantôt pour désigner un nombre comprenant une partie fractionnaire, possédant des décimales. D'où l'appellation moins ambiguë de "nombres à virgule" pour désigner un nombre dont une partie n'est pas entière (ceci convient par ailleurs à toutes les bases).

Définitions

Un nombre "à virgule" est un nombre dont une partie n'est pas entière.

Un nombre décimal (limité) est un nombre qui peut s'écrire à l'aide d'une fraction décimale.

Un nombre à virgule n'est donc pas (toujours) un nombre décimal, puisqu'un nombre peut s'écrire avec une virgule et ne pas être décimal.

Les nombres décimaux peuvent s'écrire :

- avec une écriture décimale : leur écriture comporte alors une partie entière, qui peut être nulle, et une partie décimale dont le nombre de chiffres différents de 0 situés après la virgule est fini.
- sous forme de fraction décimale, c'est-à-dire de fraction dont le dénominateur est une puissance de dix.
- (comme le produit d'un entier par une puissance de dix)

Remarque : On n'a pas besoin des fractions pour aborder le nombre décimal.

Exemples : $1/2$, $3/4$, $1/3$

Motivation : On souhaite partager une unité en 2 (base 4 par exemple)

L'écriture d'un nombre à virgule n'est rien d'autre qu'une prolongation par des rangs à exposants négatifs de la suite des rangs à exposant positif. La virgule ne sert qu'à marquer la séparation entre les chiffres situés à sa gauche représentant des unités entières (rangs à exposant positif de la base) et ceux situés à sa droite représentant des fractions de l'unité (rangs à exposant négatifs de la base). Son rôle est essentiel pour éviter un décalage des rangs.

Ex: Le nombre écrit 21,34 est représenté comme suit dans l'abaque

		X	
<u>rang 1 (10^1)</u> unités regroupées par dix	<u>unités (10^0)</u>	<u>rang -1 (10^{-1})</u> unité fractionnée en dix (dixièmes)	<u>rang -2 (10^{-2})</u> dixième fractionné en dix (centièmes)
••	•	•••	••••

", "

Ceci signifie que l'on a 2 paquets de dix unités, 1 unité, 3 dixièmes d'unité et 4 centièmes d'unité.

Attention ! Lorsqu'on a placé une virgule dans l'écriture d'un nombre, on ne change pas le nombre écrit en ajoutant des décimales égales à zéro.

Ainsi 5,6 et 5,60 représentent le même nombre.

Il faut donc être prudent lorsqu'on énonce que " pour multiplier un *nombre* par 10, il suffit de rajouter un zéro derrière " !

Note méthodologique : Comment lire un nombre à virgule ?

0,01	un centième
4,6	quatre unités six dixièmes
7,082	sept unités quatre-vingt deux millièmes

Remarque : Pourquoi dire "quatre unités six dixièmes" et non "quatre virgule 6" ?
Comparons deux nombres : 4,6 et 4,15. En disant "quatre virgule six" et "quatre virgule quinze", l'enfant sera tenté de dire que " quatre virgule quinze " est plus grand que "quatre virgule six", puisque quinze est plus grand que six !

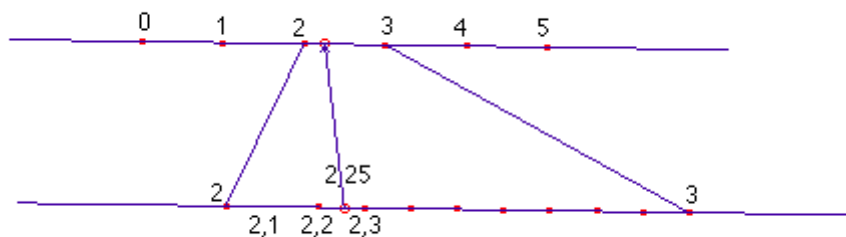
Méthodologie

On utilise une unité concrète que l'on va couper en dixièmes par exemple une paille.

Dans l'abaque, en tête de la colonne des unités figure la paille unité, et de celle des dizaines une botte de dix pailles. Ensuite, après avoir coupé l'unité en dix morceaux égaux, on crée une colonne à droite de celle des unités en tête de laquelle figurera un des morceaux de paille. Pour montrer qu'on a dû couper, la colonne des unités est séparée de celle des dixièmes par des ciseaux qui deviendront la virgule. Après avoir installé les dixièmes dans l'abaque, on va successivement étendre les calculs à la nouvelle colonne, faire un parallèle entre écriture sous forme de fraction et écriture décimale, ajouter les colonnes des centièmes et des millièmes.

Il faut aussi situer les "nouveaux" nombres sur une droite graduée. Pour montrer que la précision est de plus en plus grande, on imagine une loupe qui agrandit la graduation.

Ex: Soit à situer le nombre 2,25



9.2. Comparaison des nombres à virgule

Pour comparer deux nombres décimaux, on compare les parties entières, puis respectivement chaque chiffre des parties décimales, à partir des dixièmes. Dans le cas où les parties entières sont égales, le plus grand nombre n'est pas toujours celui qui a la plus longue partie décimale. Exemple : comparaison de 8,75 et 8,625.

La comparaison des nombres à virgule pose problème à certains élèves. En effet il n'est pas rare de rencontrer des élèves qui comparent le nombre de décimales et non leur valeur.

Ex: $6,89 < 6,345$ car le 2^e nombre possède 3 décimales alors que le premier n'en a que 2.

Pour éviter ce type d'erreur il convient d'insister sur la valeur attribuée à chaque rang. Les découpages concrets d'une unité peuvent y aider.

Pour comparer deux nombres décimaux, on compare les parties entières, puis respectivement chaque chiffre des parties décimales, à partir des dixièmes.

Remarque

Les techniques utilisées pour les fractions et les nombres décimaux sont différentes.

Exemple : multiplication d'un nombre à virgule par un entier

- a) deux quarts en base quatre
- b) deux cinquièmes en base cinq
- c) cinq huitièmes en base quatre
- d) vingt trente-sixièmes en base six
- e) A quelle quantité correspond $(0,321)_{\text{cinq}}$?

Exercices

- Expliquer à l'aide de l'abaque les calculs suivants ; si la réponse n'est pas une fraction décimale, trouver une base dans laquelle ce serait le cas :
a) $7 : 2$ b) $2 : 5$ c) $43 : 3$
- Chercher $(1/3)$ en base trois, en base six, en base quatre, en base dix.
- Ecrire comme nombre à virgule :
a) $(1/2)$ base cinq b) $(2/3)$ base neuf c) $(3/4)$ base six d) $(1/9)$ base dix
- Quelles sont toutes les fractions pouvant s'écrire comme fraction décimale ? Expliquer en illustrant par des exemples.
- Ecrire les nombres à virgule suivants comme fraction dans la base dix :
a) $(1,6)_{\text{huit}}$ b) $(1,23)_{\text{cinq}}$
- On a posé la question suivante à six enfants : "Range les nombres suivants du plus petit au plus grand : 23,4 23,37 23,127 17,15671 23,036 2,3401".
Voici les classements proposés par les enfants (5^e primaire).
Vérifier et analyser la logique interne à ces classements.

Marie	23,4	23,37	23,036	23,127	2,3401	17,15671
Christophe	23,4	23,37	23,127	23,036	17,15671	2,3401
Morgane	2,3401	17,15671	23,036	23,127	23,37	23,4
Sébastien	2,3401	17,15671	23,4	23,37	23,036	23,127
Julie	2,3401	17,15671	23,4	23,036	23,37	23,127
Thomas	2,3401	17,15671	23,036	23,4	23,37	23,127

- On demande à Alice d'effectuer les opérations suivantes : $3,7 + 5,8$ et $3,7 \times 5,8$
Elle trouve 8,15 et 15,56. Peut-on rapprocher son erreur de celle d'un des enfants de la question précédente ?

Exercices de synthèse et de réflexion

- Convertir a) 123 en base cinq b) $(123)_{\text{cinq}}$ en base dix
- Dans quelle(s) base(s) peut-on dire que :
a) 33 exprime une quantité paire ? b) 44 exprime une quantité impaire ?
c) 55 exprime une quantité impaire ? d) 66 exprime une quantité paire ?

3. Dans quelle(s) base(s) peut-on noter la quantité vingt par un nombre à 2 chiffres
a) dont celui de droite est 2 ? b) dont celui de gauche est 2 ?
4. Compléter en base dix le calcul écrit suivant, puis le traduire dans la base indiquée
a) $43 + 70$ traduire en base onze b) 17×3 traduire en base cinq
c) 58×15 traduire en base douze
5. Quelle est la base dans ces calculs inachevés que l'on complétera ?
a) $32 \times 3 = -1$ b) $25 + 43 + 25 = -1$ c) $26 + 45 + 13 = -3$ d) $32 + 23 + 22 = -3$
6. Dans la division euclidienne de 9163 par 38, donner un ordre de grandeur du quotient, puis, en posant l'opération, calculer le quotient et le reste. Indiquer la signification de chaque étape de ce calcul.
7. On divise 1980 par 37.
a) Quel est le plus grand nombre que l'on peut ajouter au dividende sans changer le quotient ?
b) Quel est le plus grand nombre que l'on peut ajouter au dividende en augmentant le quotient
1°) de 1 ? 2°) de 5 ?
c) Quel est le plus petit nombre à soustraire au dividende pour diminuer le quotient
1°) de 1 ? 2°) de 7 ?
Donner les explications nécessaires.
8. Quelle est la distinction entre "division" et "division euclidienne" ? Illustrer la réponse par des exemples numériques. Situer ensuite 20:4 par rapport à ces deux types de division.
9. Jouer avec des nombres décimaux : bataille, loto, domino, ...

trente-trois dixièmes	trois dixièmes	trente dixièmes
trois cent trente millièmes	trois millièmes	trois cent trente-trois millièmes
trois centièmes	trois cent trente-trois centièmes	trois cent trente centièmes
trois cent trois millièmes	trois cents millièmes	trente-trois millièmes
trente millièmes	trente centièmes	trente-trois centièmes
trois cents centièmes	trois	trois cent trois centièmes
0,33	0,003	0,3
0,330	0,333	0,030
3,30	0,03	$\frac{333}{1000}$
$\frac{33}{1000}$	$\frac{30}{1000}$	$\frac{3}{1000}$

$\frac{330}{100}$	3,333	$\frac{333}{100}$
$\frac{30}{10}$	$\frac{3}{10}$	3,3
3,003	3,033	3,300
0,303	0,300	$\frac{33}{10}$
0,30	0,330	0,303
0,033	$\frac{303}{100}$	$\frac{33}{100}$
$\frac{30}{100}$	$\frac{3}{100}$	3,33
3,03	$\frac{333}{100}$	

9.3. Nombre à virgule et fraction

Remarque

L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$ (comme quotient) est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme fractionnaire, c'est-à-dire sous la forme d'un nombre à virgule périodique.

$\mathbb{Q} : \left\{ q = \frac{a}{b}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}_0 \right\}$. Exemples : $3 = \frac{3}{1}$, $-2 = \frac{-2}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{-7}$, ...

Toute fraction peut se mettre sous la forme d'un nombre décimal limité ou illimité périodique.

Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique peut se mettre sous forme de fraction.

Exemples

1. $0,235 = \dots$
2. $0,232323\dots =$
3. $7,232323\dots =$
4. $7,3182323232\dots =$

Transformation d'une fraction en décimal

Si le dénominateur est un diviseur d'une puissance de dix, on transforme la fraction en une fraction équivalente ayant cette puissance comme dénominateur et le reste est trivial.

$$8/25 = 32/100 = 0,32$$

$$9/125 = 72/1000 = 0,072$$

Par contre, pour les autres dénominateurs, il faut effectuer la division en calcul écrit jusqu'à faire apparaître un reste nul ou une période. Ainsi, en effectuant la division $22 : 7$, on obtient :
 $22 : 7 = 3,142857...142857...$
 La période est constituée d'un nombre de chiffres strictement inférieur au dénominateur.

Transformation d'un décimal en fraction

Si le décimal est limité, on obtient facilement une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 et il ne reste plus à la simplifier :

$$0,216 = 216/1000 = 27/125$$

Si par contre, il est illimité périodique, il faut multiplier ce nombre par deux fois par des puissances de 10, la première fois afin de déplacer la période juste à gauche de la virgule et la deuxième fois pour faire de même, mais à droite de la virgule.

En soustrayant ces deux nombres, on obtient un nombre entier.

Prenons par exemple $n = 34,52323...23...$ et transformons-le en fraction :

$$1000n = 34523,23...23...$$

$$10n = 345,23...23...$$

$$1000n - 10n = 34523,23...23... - 345,23...23... \quad 9990n = 34178$$

$$n = 34178/9990 = 17089/4995$$

Notion de nombre réel

Certains nombres ne peuvent s'écrire sous la forme de fraction : $\pi, e, ...$: ce sont des irrationnels.

Leur partie non entière est illimitée (càd qu'elle ne se termine jamais) et les chiffres après la virgule ne se reproduisent jamais dans le même ordre (non périodiques).

Ils forment avec les rationnels un nouvel ensemble : l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

Exercices

Introduction : Quel est le 5 000e chiffre de $\frac{472}{999}$

1. Trouver la fraction qui engendre

- a) 32,7777....
- b) 2,3454545454...
- c) 5,232323...
- d) 2,0066666...
- e) 321,0143434343...

2

a. Quel est le 2 000ème chiffre de $\frac{10}{7}$ noté sous sa forme de nombre à virgule ?

b. Quel est le 3 000ème chiffre de $\frac{7}{10}$?

c. Quel est le 2000e chiffre de $\frac{3651}{70}$

3 Placer sur un diagramme de Venn les nombres

$$0, \frac{5}{4}, -9, \frac{1}{100}, 2, \frac{-78}{100}, \sqrt{2}$$

10. CONSTRUCTION DE L'ALGEBRE¹

La notion d'inconnue apparaît très tôt dans l'enseignement primaire, à savoir dès qu'on propose aux enfants de résoudre un problème. Il n'est pas opportun à ce stade de formaliser l'idée d'inconnue. Il est bon que la plupart des problèmes renvoient à des situations concrètes. On

¹ CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Nivelles, 1995

propose parfois aux élèves de véritables équations où l'inconnue apparaît sous forme d'un point d'interrogation.

Vers la fin du primaire, on apprend aussi quelques formules donnant des longueurs, aires ou volumes d'objets géométriques. Il faut se garder d'y insister trop, car elles risquent de cacher l'essentiel : la maturation des idées de longueur, aire et volume au départ de reports de l'unité. Il vaut donc mieux insister, plutôt que sur les formules et leur application, sur leur construction et l'idée de mesurage.

L'algèbre dans l'enseignement fondamental

Exprimer avec des symboles, des actions et des situations réelles, prépare le domaine de sens de l'algèbre et est source d'images mentales.

Pour comprendre les notions d'inconnue et de solution, il faut d'abord résoudre les problèmes par tâtonnement.

Il est important mais difficile de faire comprendre aux élèves que les nombres ont des écritures diverses et que le sens du signe = est de montrer que deux écritures distinctes représentent le même nombre.

Complément : Activités pour construire l'algèbre (Julie Marchal, SBPM, 1999)

Exercices récapitulatifs sur la numération

1. Calcul écrit en base six :
 a) $2354 + 534 =$ b) $2354 \times 5 =$ c) $2304 - 1355 =$
2. Numération de position
 Dans quelle(s) base(s) un nombre à 2 chiffres se terminant par 2 / par 3 peut être pair ou impair. Essayer de justifier par la disposition dans l'abaque et non par la quantité évoquée.
3. Caractères de divisibilité
 a) par quatre en base huit b) par trois en base douze c) par neuf en base six
 d) par deux en base trois e) par huit en base quatre
4. Exercices de numération et dénombrement (réflexion)
 Aide : procéder par ordre de difficulté croissante.
 a) On écrit la suite des naturels à partir de 1. Quel est le 1000e chiffre écrit ?
 b) Combien de chiffres faut-il pour écrire la suite des naturels de 1 à 1000 inclus ?
 c) On écrit la suite des multiples de 7 à partir de 7 jusque 1000 au plus.
 Quel est le dernier nombre écrit ?
 d) On écrit la suite des multiples de 5. Quel est le 1000e chiffre écrit ?
 e) Combien de chiffres faut-il pour écrire les nombres de 472 à 2527 inclus ?
 f) Avec un total de 1000 chiffres, combien de naturels successifs peut-on écrire en commençant à 888 ?
5. Calculer au millième près : $1/2$, $1/4$, $5/7$
6. Donner un exemple de fraction pouvant s'écrire sous la forme d'un nombre à virgule illimitée de période 1, 2, 3
7. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
 a) Dans R : $x > 4$ implique $x > 5$
 b) Dans R : $x^2 = 16$ implique $x = 4$
 c) Dans Z : $x^2 = 9$ implique $x = 3$
 d) Dans N : $x^2 = 25$ implique $x = 5$
8. Conversion : $(431)_{\text{dix}} = (?)_{\text{douze}}$

9. Multiplication dans l'abaque puis par calcul écrit :

$$\begin{array}{r} 321 \\ \times 24 \\ \hline \end{array}$$

cinq

10. Convertir la fraction $3/4$ en nombre à virgule a) en base sept b) en base six.
11. Énoncer et expliquer les caractères de divisibilité suivants : a) par quatre en base dix b)
par cinq en base dix c) par cinq en base vingt d) par douze en base six
12. Nombre 43 pair ou impair ?
13. Réponse et formule correspondante à chaque question :
a) Dans Z, la division est-elle associative ?
b) Dans N, la soustraction est-elle commutative ?
c) Dans Q, la soustraction distribue-t-elle la division ?
14. Différence entre nombres premiers et nombres premiers entre eux; PPCM de 225 et 180.
15. Soit $876 : 10$
a) Quel est le résultat de cette division
1°) dans le cas où l'on ne spécifie rien
2°) sachant qu'elle est euclidienne
b) Quel est le plus petit nombre à ajouter pour augmenter le quotient de 3 ?
16. Trouver la base dans laquelle a) cent s'écrit 50 b) dix s'écrit 20
17. De deux nombres, le plus grand est 216; Leur PGCD est 27. Que peut valoir l'autre ?
18. Écrire en notation décimale : a) $(3/4)_{\text{sept}}$ b) $(1/2)_{\text{trois}}$ c) $(3/13)_{\text{douze}}$ d) $(1/20)_{\text{dix}}$
19. Écrire en fraction : a) $(0,2)_{\text{quatre}}$ $(1,2)_{\text{six}}$ $(0,1)_{\text{huit}}$

11. TEST RECAPITULATIF (LIBRE)

Exercices

1. Dans quelle base le nombre a) 47 représente-t-il $(59)_{\text{dix}}$
b) 203 représente-t-il $(291)_{\text{dix}}$ c) 3004 représente-t-il $(379)_{\text{dix}}$
2. Convertir a) $(267)_{\text{neuf}}$ en base 10 b) $(671)_{\text{dix}}$ en base quatorze
3. Répondre et convertir en base 10 :
a) En base six, quel est le plus petit nombre à 3 chiffres ?
b) en base deux, quel est le plus grand nombre à 4 chiffres ?
4. On donne $A = 212202$ et $B = 122121$. Calculer
a) $A + B$ en base quatre b) $A - B$ en base trois c) six fois B en base cinq
5. Effectuer en base cinq à l'aide d'un calcul écrit : $4001 - 1340$
6. Peut-on trouver des bases x et y telles que $(10)_x = (100)_y$?
Expliquer la réponse et si oui, donner un exemple.

7. Soit 2003 : 10.

- a) Quel est le plus grand nombre à soustraire pour diminuer le quotient de 2 ?
- b) Quel est le plus petit nombre à ajouter pour augmenter le quotient de 3 ?

8. Donner le caractère de divisibilité en expliquant la réponse

- a) divisibilité par huit en base quatre
- b) divisibilité par trente-six en base six

9. Ecrire les fractions suivantes sous forme de nombre à virgule, successivement en base dix, cinq, six : a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{4}$

10. Ecrire $(3,01)_{\text{quatre}}$ comme fraction dans la base dix.

11. 23 est-il un nombre décimal ? un nombre à virgule ? Expliquer .

12. Trouver la fraction qui engendre :

- a) 2,0141414141414...
- b) 324,45678678678678.....

12. CORRECTIONS D'EXERCICES

p. 10 n°1 : Numération égyptienne

153 s'écrit C○○○○○III

351 s'écrit CCC○○○○○I

Dans les deux cas, il y a neuf symboles, qui s'additionnent : on pourrait même les écrire dans un autre ordre.

p. 10 Numération maya

Sur le Genially, il y a une dia en plus pour aider à comprendre.

Premier dépaysement, les nombres s'écrivent verticalement, de haut en bas.

Deuxième dépaysement : le plus gros symbole désigne 0

Il s'agit d'une base 20, donc on aurait, réécrit comme nous :

16000	8000	400	20	1
-------	------	-----	----	---

Réécrire les nombre dans cet abaque, cela ira sans doute mieux.

p. 11 Numération romaine – 1c

C'est possible, mais c'est long !

MMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMMM

Les Romains utilisaient parfois un M surmonté d'une ligne pour 10000

p. 12

42 unités deviennent 4 dizaines et 2 unités

99 unités deviennent 9 dizaines et 9 unités

123 unités deviennent 12 dizaines et 3 unités, qui deviennent 1 centaine, 2 dizaines et 3 unités

1997 unités deviennent 199 dizaines et 7 unités, qui deviennent 19 centaines, 9 dizaines et 7 unités, à transformer en 1 unité de mille, 9 centaines, 9 dizaines et 7 unités.

Remarque en plus de la réponse : Le fait que l'on commence toujours par les unités et que l'on aille progressivement vers des rangs de l'abaque plus élevés fait dire que **la numération écrite raisonne de droite à gauche.**

p. 13

1. Notre système de numération écrit est dit "positionnel", en base dix, et mobilisant un nombre fini de signes (neuf plus le zéro). Les groupements se font par dix. La valeur représentée par chaque

chiffre dépend de sa position dans le nombre (73 n'est pas égal à 37). Zéro sert à indiquer qu'une unité d'un rang n'est pas utilisée (exemple 307). Les techniques d'opération sont assez simples.

Notre numération orale est un système à la fois additif (cent vingt = $100+20$) et multiplicatif (quatre-vingts = 4×20), comprend un grand nombre de symboles et des conventions différentes (avec de nombreuses irrégularités) pour désigner les nombres, surtout pour tous les premiers nombres. Il n'y a pas de zéro. Il y a des groupements par dix (exemple cinquante), mais aussi par vingt (80). Les grands nombres sont difficiles à lire (nouveaux mots indispensables) et les opérations sont complexes (d'où le recours au calcul écrit et à la numération écrite).

Remarque en plus de la réponse : Les nombres sont toujours dits en commençant par les classes les plus élevées, ce qui fait dire que **la numération orale raisonne de gauche à droite**.

2. Expliquer les différences entre chiffre et nombre :

Le chiffre est un symbole, une convention d'écriture permettant de représenter un nombre, lequel est une abstraction correspondant au comptage abstrait d'une collection, caractéristique commune à toutes les collections possédant le même cardinal. Un même nombre a donc pu historiquement être représenté par des conventions de numération différentes. Le chiffre renvoie à un ensemble de symboles pouvant varier selon les cultures et les civilisations, mais aussi selon les besoins (bases deux, dix, seize, soixante, ...).

p. 14-15

Exercices de synthèse et de réflexion

Bases envisagées : deux, trois, huit, dix, seize, soixante

1. Le nombre de chiffres est égal à la base (de 0 jusqu'à $n-1$ où n est la base)
(ces chiffres sont en général (pas en base soixante) 0, 1, ..., 9, A, B, ..., où A vaut dix, B vaut onze,...)
2. a et c : aucun effet
b : multiplie le nombre par la base, puisque chaque chiffre est décalé d'un rang vers la gauche.
d : divise le nombre par la base, puisque chaque chiffre est décalé d'un rang vers la droite.
3. a) ajouter un zéro à droite du nombre
b) supprimer un zéro à droite du nombre
5. Développer une vision globale du nombre, développer l'estimation, l'ordre de grandeur.

p. 15 – exercices

1 à 11 : expliqués au cours

9. cf. cours

Exercice 9 c)

Multiplier un nombre par 101 revient à le multiplier, quelle que soit la base, par sa base au carré plus une fois lui-même. Or multiplier un nombre, quelle que soit la base, par sa base au carré revient à le décaler de deux rangs vers la gauche dans l'abaque, et (si supérieures à deux), lui ajouter 101 donne donc toujours 10201.

d) Elever au carré revient à multiplier par lui-même. Or la notation 100 indique qu'on multiplie par une fois sa base au carré. Or multiplier un nombre par sa base au carré revient toujours à le décaler de deux rangs vers la gauche dans l'abaque.

p. 15 : exercices supplémentaires (plusieurs sont expliqués dans le cours)

1 a) 21, b) 101

2 a) $70 = 3 \times 20 + 10 \times 1$, qui s'écrit en base vingt : 3A (A est le chiffre pour dix)

b) 7 c) 9 d) 7 e) 144 f) 322 g) 218 h) 12345 i) 10221

3 a) 11001 b) 221 c) 80 d) 40 e) 811

4 a) $300 = 10 \times 30 + 0 \times 1$, qui s'écrit A0 (A est le chiffre pour dix)

b) 253

5 a) 1300 b) A0

6) 15

7) 16

8) a - b) le plus grand nombre en base deux et en base dix : $(11111000)_{\text{deux}}$

c - d) le plus petit nombre en base deux : $(10001111)_{\text{deux}}$

Remarque : ceci montre que le raisonnement est le même quelle que soit la base.

p. 15 Exercices supplémentaires:

1. $70(\text{dix}) = x(\text{vingt}) :$

$$70(\text{dix}) = 3A(\text{vingt})$$

$$A = 10$$

2. $21(\text{trois}) = x(\text{dix}) :$

$$3 \times 2 + 1 \times 1 = 7$$

3	U
2	1

3. $10(\text{sept}) = x(10) :$

$$1 \times 7 + 0 \times 1 = 7$$

7	U
1	0

4. $100(\text{douze}) = x(\text{dix}) :$

$$144 \times 1 = 144$$

144	12	U
1	0	0

5. $127(\text{huit}) = x(\text{cinq}) :$

$$64 + 16 + 5 = 85(\text{dix})$$

$$127(\text{huit}) = 32^2(\text{cinq})$$

64	8	U
1	2	7

25	5	U
3	2	2

6. $5349(\text{dix}) = x(\text{huit}) :$

4096	512	64	8	U
1	2	3	4	5

7. Quelle est en base 10 le plus grand nombre à 4 chiffres dans la base 2 ?

15

8	4	2	U
1	1	1	1

8. Quelle est en base 10 le plus petit nombre à 5 chiffres dans la base 2 ?

16

16	8	4	2	U
1	0	0	0	0

11) la base peut être onze, douze, ..., nonante-huit, nonante neuf, cent (soit un nombre compris (d'où la notation $\text{dix} < \text{base} \leq \text{cent}$ au cours) entre dix et cent, et donc différent de dix mais pas forcément de cent).

Remarque : en base cent et un, le nombre cent s'écrit avec un chiffre, le chiffre cent.

p. 17 20 et 59

1. Écrire 20 en base 2

16	8	4	2	U
1	0	1	0	0

2. Écrire 20 en base 3

9	3	U
2	0	2

3. Écrire 20 en base 5

5	U
4	0

4. Écrire 20 en base 8

8	U
2	4

5. Écrire 20 en base 12

12	U
1	8

6. Écrire 20 en base 16

16	U
1	4

7. Écrire 59 en base 2

32	16	8	4	2	U
1	1	1	0	1	1

8. Écrire 59 en base 3

27	9	3	U
2	0	1	2

9. Écrire 59 en base 5

25	5	U
2	1	4

10. Écrire 59 en base 8

8	U
7	3

11. Écrire 59 en base 12 : $59 = 4 \times 12 + 11$, le chiffre pour 11 est B

12	U
4	B

12. Écrire 59 en base 16

16	U
3	B

p. 30 n° 2 (voir aussi l'explication sur diaporama), exercice 1 repris au cours.

a est le dividende, b est le diviseur, et on ne connaît ni le quotient q ni le reste r.

On a $a = b \cdot q + r$. On traduit ensuite la deuxième information (Si ...) $(a + 20) = b \cdot (q + 2) + r - 2$, ce qui donne $a = b \cdot (q + 2) + r - 2 - 20$ On égalise ensuite les deux expressions trouvées pour a (transitivité de l'égalité : si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$) $b \cdot q + r = b \cdot (q + 2) + r - 22$. On distribue la parenthèse et on soustrait r aux deux membres : $b \cdot q = b \cdot q + 2b - 22 \Leftrightarrow 2b - 22 = 0 \Leftrightarrow 2b = 22 \Leftrightarrow b = 11$ **p. 30 n° 3 (voir aussi l'explication sur diaporama)**

932 est le dividende, b est le diviseur, et on ne connaît pas le quotient q mais le reste r vaut 132.

On a $932 = b \cdot q + 132$. Comme le reste vaut 132, le diviseur b doit être supérieur au reste : $b > 132$ On a $932 - 132 = b \cdot q \Leftrightarrow b \cdot q = 800$, avec $b > 132$

Ceci donne comme réponses possibles :

b = 800 et q = 1

b = 400 et q = 2

b = 200 et q = 4

b = 160 et q = 5 (la réponse suivante b = 100 et q = 8 ne convient plus puisque $b > 132$, et donc on a fini)

Exercices p. 40 : repris sur des diaporamas**Exercices p. 41 : repris au cours et sur des diaporamas, avec explications****Exercices p 42 et suivantes : repris aussi en partie avec explications sur diaporama**

8.

Le soulignement sert à mettre en évidence qu'il s'agit de nombres à plusieurs chiffres.

Aide : disposer les 4 nombres en calcul écrit.

Difficulté spécifique de l'exercice : tenir compte des reports successifs.

En observant les unités, on a $6+y+7+7 = \dots 4$, le chiffre y vaut donc 4.

La somme des unités est 24 et le report sera de 2.

En observant les dizaines, on a $2+x+5+y = \dots 0$, ou $x+11 = \dots 0$, le chiffre x vaut donc 9.

La somme des dizaines est 20 et le report sera de 2.

On peut vérifier avec les centaines : $2+x+3 = 1y$, ou $2+9+3 = 14$, ce qui est correct.Réponse : $x = 9$, $y = 4$.

9.

 $mcd + udc = cdm + 1$

Aide : disposer les 4 nombres en deux calculs.

Difficulté spécifique de l'exercice : tenir compte et discuter des reports éventuels.

En observant les unités, on a $u+m = u+1$, le chiffre m vaut donc 1 et il ne faut pas tenir compte de reports pour les unités.En observant les dizaines et en prenant 1 pour m, on a $d+c = \dots 1$, on a donc $d+c = 11$ et il y a un report de 1 ou $d+c = 1$ En observant les centaines, on a $c+d (+1 \text{ s'il y a un report}) = d$:- s'il n'y a pas de report, on a $c=0$ et donc $d = 1$ (et on n'a pas de nouveau report)- s'il y a un report, on a $c = 9$ et donc $d = 2$ (et on a un nouveau report de 1)En observant les unités de mille, s'il n'y a pas de report, on a $m + u (+1 \text{ s'il y a un report}) = c$ Or m vaut 1, donc $1+u (+1 \text{ s'il y a un report}) = c$.Par conséquent, c n'est pas nul et vaut 9, et $1 + u + 1 = 9$, donc $u = 7$.Conclusion : le nombre est 1927.Vérification : $1927 + 7291 = 9217 + 1$

11.

Exemple numérique pour comprendre l'énoncé :

 $765 - 567 = 198$ Généralisation $(u+2)(u+1)u - u(u+1)(u+2) = 198$

Soustraction par emprunts en calcul écrit.

Pour les unités, on doit effectuer $u - (u+2)$, il faut donc emprunter une dizaine qui sera transformée en 10 unités. On a donc $10+u - (u+2) = 8$ Pour les dizaines, on doit effectuer $(u+1)-1 - (u+1)$, il faut donc emprunter une centaine qui sera transformée en 10 dizaines. On a donc $10 + (u+1)-1 - (u+1) = 9$ Pour les centaines, on doit effectuer $(u+2)-1 - u = u+1 - u = 1$.

La différence vaut donc bien 198, quel que soit les chiffres consécutifs.

12.

Nombre à trouver : mcd

Informations b, c et d résumées : $udc - mcd = 8082$, $d = m+c$, $u = m+d = 2m+c$

En remplaçant les deux dernières informations dans la première, ceci donne :

 $(2m+c)(m+c)c - m(m+c)(2m+c) = 8082$ (et la somme des chiffres vaut 25)En observant les unités, ceci donne à effectuer $m - (2m+c)$ qui nécessitera un emprunt. $10 + m - (2m+c) = 2$ ou $10 - m - c = 2$ ou $m + c = 8$ (et d vaut donc 8)Comme la somme des chiffres vaut 25, $m+c + d + u = 25$, ou $16 + u = 25$, donc u = 9Or $u = m+d$, donc m = 1.Comme $m+c = 8$, ceci donne c = 7.

Le nombre cherché est 1789.

Vérification : le nombre renversé est 9871, et la différence $9871 - 1789$ vaut bien 8092.

Remarque : Il y a d'autres façons de résoudre cet exercice, en utilisant davantage la soustraction écrite.

15.

Difficulté spécifique de l'exercice : tenir compte d'un emprunt éventuel.

Nombre à trouver : du avec $d+u = 15$, ou $d = (15-u)$

du – ud = 27 On va remplacer d par $15-u$ dans la soustraction :

$$(15-u)u - u(15-u) = 27.$$

En observant les unités, ceci donne à effectuer $u - (15-u)$, ce qui nécessite un emprunt d'une dizaine à transformer en 10 unités.

On a donc $10 + u - (15-u) = 7$, ou $2u - 5 = 7$, et donc $2u = 12$ et $u = 6$.

Par conséquent $d = 15 - u = 15 - 6 = 9$.

Le nombre cherché est 96.

Vérification $96 - 69 = 27$

16.

Les deux nombres à chercher ont une différence de 5. Si on appelle l'un x, l'autre peut s'appeler $x + 5$ (ou $x - 5$, ce qui donnera les mêmes résultats finaux).

Comme on augmente chaque facteur de 7, les nouveaux facteurs sont $x+7$ et $x+5+7$, c'est-à-dire $x+12$.

Le produit initial vaut $x(x+5) = x^2 + 5x$

Le nouveau produit est $(x+7)(x+12) = x^2 + 12x + 7x + 84 = x^2 + 19x + 84$.

Le produit a augmenté de 364, donc $(x^2 + 19x + 84) - (x^2 + 5x) = 364$

Une fois ôtées les parenthèses, ceci donne $x^2 + 19x + 84 - x^2 - 5x = 364 \Leftrightarrow 14x = 364 - 84 \Leftrightarrow 14x = 280$

On a donc $x = 20$ et les deux facteurs sont 20 et 25.

17.

Si le diviseur est x, le dividende est $319 - x$.

On sait que dividende = quotient . diviseur + reste, ce qui donne ici :

$$319 - x = 23 . x + 7 \Leftrightarrow 319 - 7 = 23x + x \Leftrightarrow 312 = 24x \Leftrightarrow x = 13.$$

Réponse : le diviseur est 13 et le dividende est $319 - 13 = 306$.

20.

On repart du résultat : dividende = quotient . diviseur + reste

On sait que le diviseur est 14, et que le reste vaut le quotient, ce qui donne :

dividende = quotient . 14 + quotient, c'est-à-dire dividende = quotient (14 + 1) ou encore dividende = 15 . quotient.

Le nombre de départ doit donc être un multiple de 15, inférieur à 100 (dit dans l'énoncé).

Les solutions sont donc tous les multiples non nuls de 15 inférieurs à 100, soit 15, 30, 45, 60, 75 et 90.

21.

$$253 - 234 = 19$$

La division de 253 par 19 donne comme quotient 13 et comme reste 6

La division de 234 par 19 donne comme quotient 12 (un de moins, qui correspond à la différence observée) et comme reste 6 (le même reste que celui de la division précédente, vu qu'on a juste ajouté une fois le diviseur).

22. (A essayer de faire seul après avoir compris le 20. Attention, le nombre est bien 50328)

On repart du résultat : dividende = quotient . diviseur + reste

On sait que le dividende vaut $50328 - \text{diviseur}$ et que le quotient vaut 152, ce qui donne en remplaçant :

$$50328 - \text{diviseur} = 152 . \text{diviseur} + \text{reste}, \text{ le reste devant être inférieur au diviseur.}$$

$$\text{On a donc } 50328 - \text{reste} = 153 . \text{diviseur}$$

On cherche donc ce qui se passe autour de 50328 : 153 (qui donne un résultat compris entre 328 et 329).

Le diviseur ne peut pas être 329 car $153 . 329 = 50337$, ce qui est trop par rapport à l'énoncé.

Si le diviseur est 328, on a $153 . 328 = 50184$ et le reste vaut $50328 - 50184 = 144$ (qui est bien inférieur au diviseur)

Si le diviseur est 327, on a $153 \cdot 327 = 50031$ et le reste vaut $50328 - 50031 = 297$ (qui est bien inférieur au diviseur)

Si le diviseur est 326, on a $153 \cdot 326 = 49878$ et le reste vaut $50328 - 49878 = 450$ (qui n'est pas inférieur au diviseur, donc cette solution ne convient pas).

Il y a donc deux solutions :

Solution 1 : diviseur = 328, reste = 144 et dividende = $50328 - 328 = 50000$

Solution 2 : diviseur = 327, reste = 297 et dividende = $50328 - 327 = 50001$

Autre explication, proche :

p. 44 n° 22

Cet exercice demande pas mal de calculs et ne serait pas proposé sous cette forme lors d'un examen.

L'idée, est de trouver le diviseur, sachant que le quotient vaut 152.

En calcul écrit, $50328 : 152$ a pour quotient 331 et pour reste 16.

Mais le nombre 50328 est la somme du dividende et du diviseur, dont on sait qu'il vaut moins de 331.

En essayant avec comme diviseur 330, le nombre est 49998 mais le quotient ne vaut que 151 (et pas 152)

On a le même problème avec 329 comme diviseur et 49999 comme dividende.

On obtient une première réponse avec comme diviseur 328, et donc comme dividende 50000.

Le reste vaut alors 144

On obtient une deuxième réponse avec comme diviseur 327, ce qui donne comme dividende 50001

Le reste est alors 297.

Il n'y a pas d'autre réponse (le reste serait trop grand).

23.

Appelons la base a . Si le nombre se termine par 0, c'est un multiple de la base.

Il sera donc toujours pair si la base est paire (exemples 10 pour les bases deux, quatre, six, ...)

Si la base est impaire, ce sera un multiple de la base.

Ce multiple sera pair si le premier chiffre est pair (exemple 20 en bases trois, cinq, sept, ...)

Ce multiple sera impair si le premier chiffre est impair (exemple 10 en bases trois, cinq, sept, ...)

Exercices p. 45 : 2 à 4 repris sur diaporama

P. 45 n. 5 quelle méthode utiliser avec 240 ?

Pour 72 comme pour 240, on teste la divisibilité par les nombres de 1 jusqu'au nombre inférieur ou égal à la racine carrée du nombre indiqué) : pour 240, la racine carrée est entre 15 et 16.

P. 45 n. 6 => quel est le procédé le plus court si on n'a pas sous les yeux le crible d'Eratosthènes ?

Le reconstruire : supprimer les multiples de 2, de 3, de 5 et de 7 jusqu'à 100 de la liste des nombres jusqu'à 100.

P. 46 n. 1 (des exercices de réflexion)

C'est comme dans l'exercice fait au cours : on discute selon que la base est paire ou impaire et que le premier chiffre est pair ou impair (p. 46 n°8)

Suite reprise sous une autre forme au cours ou sur diaporamas pour les exercices 1 à 4

P. 46 n. 1b => divisibilité par 4 en base 4 si le dernier chiffre du nombre est un multiple de 4? Mais ce n'est pas possible en base quatre (pas de chiffre 4 !)

Il faut donc que le dernier chiffre soit 0 (comme en base dix, un nombre est divisible par 10 ssi son dernier chiffre est 0)

Exercices de réflexion (8 et 14 repris au cours, autres sur diaporamas)

P. 47 n. 6 => aide

Dans ce genre d'exercice, l'idée est d'utiliser l'abaque 20, c'est 2 fois la base, ce qui sera toujours pair (pour autant que la base soit > 2 , puisqu'on utilise le chiffre 2), multiple de trois si la base est multiple de trois, multiple de 4 si la base est paire (et > 2).

Si cela semble difficile, commencer par prendre quelques exemples numériques (si la base est) avant de passer à la généralisation.

C'est la même chose pour l'exercice 7

exercices n. 7, 11b, 12, 15, 16 : pistes pour la résolution.

11b : reprendre $D = d.q + r$ et regarder qui peut jouer le rôle de diviseur et de quotient, en tenant compte du reste.

12 : Reprendre le corrigé de l'exercice supplémentaire p. 30 n° 1 fait au cours en début de séance, l'exercice p. 43 n° 10 et effectuer l'exercice 19 p. 44

15 : Prendre quelques exemples numériques (9, 10, 11. ; 17, 18, 19, ;), écrire les nombres sous la forme $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ et reprendre ce qui est demandé

16 : Voir ce que signifie l'énoncé et le formuler autrement : on a un nombre qui s'écrit 4321* et on veut qu'il soit divisible par 13 (calcul écrit).

Exercices p. 50 repris sur diaporama

Exercices familles nombres p 52-53

Repris pour certains dans le cours, pour d'autres dans le diaporama d'exercices supplémentaires 1.

$$x = a.17 + r \text{ avec } r \text{ non nul}$$

$$y = b.17 + r$$

$$x+y = (a+b).17 + 2r$$

Comme $2r$ est pair et que 17 ne l'est pas, $x+y$ ne peut pas être divisible par 17, puisque le reste $2r$ ne peut pas être multiple de 17.

2.

$$a = b.q + r \text{ donne ici } 750 = a.16 + 14$$

$$750 = a.16 + 14 \Leftrightarrow 750 - 14 = 16a \Leftrightarrow 16a = 736 \Leftrightarrow a = 46$$

Le diviseur est donc 46.

3.

$$a = b.q + r \text{ donne ici } x = 12.y + 5, \text{ avec } x \leq 100$$

$$x = 12.y + 5 \Leftrightarrow x - 5 = 12y$$

On donne ensuite des valeurs successives à y , on calcule x et on vérifie qu'il est ≤ 100

Ceci donne les solutions suivantes :

$$y = 0, x = 5 \quad y = 1, x = 17 \quad y = 2, x = 29 \quad y = 3, x = 41 \quad y = 4, x = 53 \quad y = 5, x = 65$$

$$y = 6, x = 77 \quad y = 7, x = 89 \quad \cancel{y = 8, x = 101}$$

Les 8 réponses à la question sont donc : 5 ; 17 ; 29 ; 41 ; 53 ; 65 ; 77 et 89.

4. Même raisonnement que le n°3

$$a = b.q + r \text{ donne ici } x = 15.y + 10, \text{ avec } x \leq 200$$

$$x = 15.y + 10 \Leftrightarrow x - 10 = 15y$$

On donne ensuite des valeurs successives à y , on calcule x et on vérifie qu'il est ≤ 200

Ceci donne les solutions suivantes :

$$y = 0, x = 10 \quad y = 1, x = 25 \quad y = 2, x = 40 \quad y = 3, x = 55 \quad y = 4, x = 70 \quad y = 5, x = 85$$

$$y = 6, x = 100 \quad y = 7, x = 115 \quad y = 8, x = 130 \quad y = 9, x = 145 \quad y = 10, x = 160 \quad y = 11, x = 175$$

$$y = 12, x = 190.$$

Les 13 réponses à la question sont donc : 10 ; 25 ; 40 ; 55 ; 70 ; 85 ; 100 ; 115 ; 130 ; 145 ; 160 ; 175 et 190.

p. 52 n°4, autre raisonnement

On cherche d'abord les multiples de 15 inférieurs à 200 :

0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 et 195.

Comme le reste vaut 10, on ajoute 10 à ces nombres, en vérifiant qu'ils sont bien < 200

Les réponses sont : 10, 25, 40, 55, 70, 85, 100, 115, 130, 145, 160, 175 et 190

p. 52 n°5

On cherche un dividende, on connaît le diviseur : 6, on connaît le quotient : 15.

Le reste peut valoir : 0, 1, 2, 3, 4, 5 (pas plus, puisque le diviseur est 6)

Le dividende est $D = 5 \times 15 + r$, le reste peut prendre 6 valeurs, on a donc 6 réponses.
Les réponses sont 90, 91, 92, 93, 94 et 95.

6.

On sait que $4027 = 65 \times 61 + 62$

Si le diviseur est 65, le quotient est 61 (et le reste 62, qui est bien strictement inférieur à 65).

Si le diviseur est 61, l'égalité donne comme quotient proposé 65 et comme reste 62, qu'il faut transformer puisque le reste est trop grand. Le quotient est alors 66 (et le reste 1).

7. Même raisonnement que le n°6

On sait que $1161182 = 1023 \times 1134 + 1100$

Si le diviseur est 1134, le quotient est 1023 (et le reste 1100, qui est bien strictement inférieur à 1134).

Si le diviseur est 1023, l'égalité donne comme quotient proposé 1134 et comme reste 1100, qu'il faut transformer puisque le reste est trop grand. Le quotient est alors 1135 (et le reste 77, obtenu en calculant $1100 - 1023$).

8. (Très proche du n°5)

Dans les deux cas, on part de $a = b.q + r$

- a) $a = 6.10 + r$ (avec $r < 6$) Les valeurs successives de r donnent pour le dividende les six réponses 90, 91, 92, 93, 94 et 95.
- b) $a = 4.15 + r$ (avec $r < 6$) Les valeurs successives de r donnent pour le dividende les quatre réponses 60, 61, 62 et 63.

9.

$42 = 4.10 + 2$ (le reste vaut ici 2, il doit valoir entre 0 et 9)

- a) On peut ajouter de 1 à 7 au reste (qui restera < 10), et donc aussi au dividende.
Le plus grand nombre à ajouter est donc 7
- b) On peut soustraire de 1 à 2 au reste (qui restera positif), et donc aussi au dividende
Le plus grand nombre à retrancher est donc 2

10.

$a = 124.q + 69$ (le reste vaut ici 69, il doit valoir entre 0 et 123)

- a) On ajoute $5.124 = 620$ (pour augmenter le quotient de 5),
et le plus possible au reste, soit $123 - 69 = 54$.
Au total, on peut donc ajouter $620 + 54 = 674$.
- b) Si on veut retrancher le moins possible, il faudra que le reste soit maximum, soit ici 123, et le nouveau quotient sera $q - 3$ (puisque l'on diminue le quotient de 3 unités).
Le nombre à retrancher s'obtient en faisant la différence entre l'expression initiale et $124.(q-3) + 123$.
 $124q + 69 - (124.(q-3) + 123) = 124q + 69 - 124q + 124.3 - 123 = 372 + 69 - 123 = 318$.
Le plus petit nombre à retrancher est donc 318.

11.

$a = b.5 + 2 = c.3 + 2$ donne $5b = 3c$. Le nombre est donc égal à un multiple de 15 + 2.

Il y a une infinité de solutions : 2 ; 17 ; 32, 47, ..., qui peuvent toutes s'écrire sous la forme $15x+2$ où x est un nombre naturel.

12.

Dans les deux cas, on part de $a = b.q + r$. Les diviseurs b sont égaux, normalement pas les quotients k et l . On cherche des valeurs possibles pour b , qui devra être au moins égal à 11 (puisque un des restes vaut 10)

$489 = b.k + 9 \Leftrightarrow b.k = 480$ et donc b est un diviseur de 480 supérieur à 11

$418 = b.l + 10 \Leftrightarrow b.l = 408$ et donc b est un diviseur de 408 supérieur à 11

b est donc un diviseur du PGCD de 408 et 480 supérieur à 11.

Le PGCD de $480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$ et de $408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17$ est $2^3 \cdot 3 = 24$.

Les valeurs possibles pour b sont 12 et 24.

14. (fait au cours)

Pour éviter les nombres à virgule, les données seront converties en mm

On cherche le PGCD de 432, 360, 600 et 480, qui devra diviser $480 - 432 = 48$.

On trouve 24 (PGCD de $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ et $48 = 2^4 \cdot 3$).

Les carrés mesurent $24 \text{ mm} = 2,4 \text{ cm}$ de côté.

p. 53 n°19 : a été fait en grande partie au cours

On utilise les caractères de divisibilité des nombres indiqués en base dix

a) divisibilité par 4, x peut valoir 1 ou 3 ou 5 ou 7 ou 9

b) divisibilité par 8, x ne peut valoir que 2 (528 est bien multiple de 8)

c) divisibilité par 9, x vaut 0 ou 9

d) divisibilité par 25, x vaut 2 ou 7, mais en plus on doit tenir compte de divisibilité par 9, donc la seule solution est 9225 et x vaut 2

e) la somme des chiffres doit être un multiple de 3 et vaut $12 + 2x$.

seules solutions : x est multiple de 3, donc x vaut 0, 3, 6 ou 9

f) $7x4$ multiple de 4, donc x vaut 0, 2, 4, 6 ou 8

$7x4$ donc la somme des chiffres doit aussi être multiple de 3, la seule solution est $x = 4$

Exercices récapitulatifs p. 53 : repris pour plusieurs sur diaporama

Exercices sur les fractions p 59 et suivantes

Repris pour beaucoup au cours

1.

$$a) \frac{\frac{5-4}{10} + \frac{1+2+15}{2 \cdot 5}}{\frac{1+4}{2 \cdot 5}} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{17}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{18}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{18}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{72}{25}$$

$$b) \frac{51}{19}$$

$$c) \frac{11}{5}$$

$$d) \frac{8}{3}$$

$$e) \frac{1}{6}$$

$$f) \frac{10}{3}$$

$$g) \frac{2}{3}$$

2.

$$1a) \frac{2}{3}$$

$$b) \frac{1}{4}$$

$$c) \frac{3}{5}$$

$$d) \frac{9}{25}$$

$$e) \frac{4}{9}$$

$$2a) 1) \frac{2}{3}$$

$$2) \frac{1}{5}$$

$$3) \frac{1}{7}$$

$$4) \frac{1}{5}$$

$$2b) 1) \frac{2}{3}$$

$$2) \frac{1}{5}$$

$$3) \frac{1}{7}$$

$$4) \frac{1}{5}$$

$$5) \frac{6}{7}$$

3.

$$a) \frac{4}{3}$$

$$b) \frac{1}{6}$$

$$c) \frac{3}{5}$$

$$d) \frac{1}{4}$$

$$e) \frac{5}{2}$$

4.

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{16}$$

$$\frac{11}{20}$$

8.

$$a) \frac{90}{128}$$

$$b) \frac{15}{60}$$

13.

$$\frac{-49+27-568}{63} = \frac{-36+14-315}{63} \cdot \frac{360}{240+72+25} = \frac{-337}{7} \cdot \frac{40}{337} = \frac{-40}{7}$$

Fractions égyptiennes p 63

Exercice : transformer $\frac{22}{27}$ en fraction égyptienne

$\frac{22}{27}$ est une fraction irréductible. La plus grande fraction de type $\frac{1}{a} < \frac{22}{27}$ est $\frac{1}{2}$.

$\frac{22}{27} = \frac{1}{2} + \frac{22 \cdot 2 - 1 \cdot 27}{2 \cdot 27} = \frac{1}{2} + \frac{17}{54}$. La plus grande fraction de type $\frac{1}{a} < \frac{17}{54}$ est $\frac{1}{4}$.

$\frac{22}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{17 \cdot 2 - 1 \cdot 54}{2 \cdot 54} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{7}{108}$. La plus grande fraction de type $\frac{1}{a} < \frac{7}{108}$ est $\frac{1}{16}$.

$\frac{22}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{7 \cdot 4 - 1 \cdot 108}{16 \cdot 108}$

$\frac{22}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{16} + \frac{27 \cdot 4 \cdot 4}{432}$

$\frac{22}{27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{16}{16} + \frac{1}{432}$

(Vérification possible pendant l'année avec la calculatrice).

Exercices sur nombres à virgule p 66

Plusieurs exercices sont repris au cours

1.

a) 7 : 2

On place 7 unités dans l'abaque. On peut déjà partager 6 unités en 2 parts de 3, il en reste 1.

On coupe (virgule) l'unité en dix dixièmes, que l'on peut partager en 2 parts de 5.

Le nombre cherché est donc 3,5

b) 2 : 5

On place 2 unités dans l'abaque. On ne peut rien partager en 5.

On coupe (virgule) les 2 unités en dix dixièmes, ce qui donne vingt dixième que l'on peut partager en 5 parts de 4.

Le nombre cherché est donc 0,4

c) 43 : 3

On place 4 dizaines et 3 unités dans l'abaque. On peut déjà partager 3 dizaines en 3 parts de 14, il en reste 1, que l'on transforme en unités qu'on ajoute aux 3 existantes, ce qui fait 13 unités.

On peut déjà partager 12 unités en 3 parts de 4, il en reste 1.

On coupe (virgule) l'unité en dix dixièmes, que l'on peut partager en 3 parts de 3.

Comme il en reste une, on continue le processus, ce qui donne 3 centièmes, 3 millièmes

Le nombre cherché est donc 14,3333.....

Ce n'est pas une fraction décimale, ce qui serait le cas en base 3.

2.

(1/3) en base trois donne 0,1 (1/3) en base six donne 0,2

(1/3) en base quatre donne 0,111.... (1/3) en base dix donne 0,3333.....

3.

b) (2/3) en base neuf donne 0,6

d) (1/9) en base dix donne 0,111.....

4.

Les fractions dont le dénominateur peut être mis sous la forme d'une puissance de dix.

Exemples $3 = 3/1$; $2/5 = 4/10$; $3/4 = 75/100$

5.

a) (1,6) en base huit vaut $1 + 6/8 = 1 + 3/4 = 7/4$

b) (1,23) en base cinq vaut $1 + 2/5 + 3/25 = (25 + 10 + 3) / 25 = 38/25$

7. Marie (couples d'entiers et non nombres à virgule).

Exercices de synthèse et de réflexion p. 66 : plusieurs corrigés sur diaporama

Exercices récapitulatifs sur la numération p 70

4. (Exercices de numération et dénombrement (réflexion))

a)

De 1 à 9, on utilise 9 chiffres

De 10 à 99, on utilise $2 \cdot (99 - 10 + 1) = 2 \cdot 90 = 180$ chiffres

On a déjà utilisé $180 + 9 = 189$ chiffres. Il nous en reste $1000 - 189 = 811$

A partir de 100 (et jusqu'à 999), tous les nombres comportent 3 chiffres.

811 chiffres nous permettent d'écrire $811 : 3 = 270$ nombres et il reste un chiffre, qui est celui qui nous est demandé.

Les 270 nombres vont de 100 à $100 + 270 - 1$, donc de 100 à 369.

Le 1000^e chiffre est donc celui qui suit 369, c'est-à-dire **3** (qui sert à écrire 370)

b)

Ceci généralise ce qui a été fait au a)

De 1 à 9, on utilise 9 chiffres

De 10 à 99, on utilise $2 \cdot (99 - 10 + 1) = 2 \cdot 90 = 180$ chiffres

De 100 à 999, on utilise $3 \cdot (999 - 100 + 1) = 2700$ chiffres

Pour écrire 1000, on a besoin de 4 chiffres.

Ceci donne au total $9 + 180 + 2700 + 4 = \mathbf{2893}$ chiffres nécessaires.

c)

Il suffit ici de trouver le plus grand multiple de 7 inférieur à 1000, que l'on obtient en multipliant quotient entier de la division de 1000 par 7. La réponse est donc $142 \cdot 7 = 994$.

d)

Pour les multiples de 5 à 1 chiffre, on a 0 et 5, qui utilisent donc 2 chiffres.

Pour les multiples de 5 à 2 chiffres, on a 10, 15, ..., 90, 95 (ou de 2×5 à 19×5), qui utilisent $2 \cdot 18 = 36$ chiffres.

Pour les multiples de 5 à 3 chiffres, on a 100, 15, ..., 90, 995 (ou de 20×5 à 199×5), qui utilisent $3 \cdot 180 = 540$ chiffres.

A ce stade, on a utilisé $2 + 36 + 540 = 578$ chiffres.

Il nous en reste 422, qui vont servir à écrire des nombres à 4 chiffres

($1000 = 200 \cdot 5$, $1005 = 201 \cdot 5$ etc...)

Les 420 premiers servent à écrire 105 nombres (de $200 \cdot 5 = 1000$ à $304 \cdot 5 = 1520$)

Le nombre suivant est 1525, et le chiffre qui nous intéresse est le deuxième (cf 422 chiffres restants)

La réponse est donc 5.

e)

Les nombres de 472 à 999 utilisent $3 \cdot (999 - 472 + 1) = 3 \cdot 528 = 1584$ chiffres

Les nombres de 1000 à 2527 utilisent $4 \cdot (2527 - 1000 + 1) = 4 \cdot 1528 = 6112$ chiffres

Au total, on a utilisé $6112 + 1584 = 7696$ chiffres.

f)

Pour écrire les 112 nombres de 888 à 999 (qui ont 3 chiffres), on utilise $112 \cdot 3 = 336$ chiffres.

Il nous en reste $1000 - 336 = 664$.

Ces 664 chiffres permettent d'écrire $664 : 4 = 166$ nombres à 4 chiffres.

Au total, on a donc écrit $112 + 166 = 278$ naturels successifs.

Voir diaporama pour les exercices 7, 9 et 12

Exercices p. 69 repris au cours pour plusieurs

p. 71 n°13

Idée : chercher des contre-exemples numériques et se rappeler des différentes propriétés.

a) faux, exemple : $(16 : 8) : 2 \neq 16 : (8 : 2)$ b) faux, exemple $7 - 5 \neq 5 - 7$ c) faux, exemple $12 - (6 : 2) \neq (12 - 6) : (12 - 2)$

p. 71 n°18c

Ecrire 3/13 en base douze

$$3U = 36 (1/12) = 26 (1/12) + 10 (1/12) = 13 \times 2 (1/12) + 120 (1/144)$$

$$= 13 \times 2 (1/12) + 117 (1/144) + 3 (1/144) = 13 \times 2 (1/12) + 13 \times 9 (1/144) + 3 (1/144) \text{ (on revient au 3 de départ)}$$

Réponse : 0,292929....

Test récapitulatif

Numération, p. 71-72

1.

Soit a la base cherchée

a) $59 = 4a + 7 \Leftrightarrow 4a = 52$. La base a vaut treize

b) $291 = 2a^2 + 0.a + 3 \Leftrightarrow 2a^2 = 288 \Leftrightarrow a^2 = 144$. La base a vaut douze

c) $379 = 3a^3 + 0.a^2 + 0.a + 4 \Leftrightarrow 3a^3 = 375 \Leftrightarrow a^3 = 125 \Leftrightarrow a = 5$. La base est cinq

2.

a) $2 \times 9^2 + 6 \times 9 + 1 \times 7 = 162 + 54 + 7 = 223$

b) $671 = 47 \times 14 + 13 \times 1 = 3 \times 14^2 + 5 \times 14 + 13 \times 1$. Le nombre cherché est 35D
(D est le chiffre pour treize)

3.

a) 100 (le 1 est obligatoire pour avoir un nombre à 3 chiffres)

b) 1111 (il faut prendre le plus possible pour chaque rang, soit 1 pour la base deux)

4.

a) 1000323

b) 20011

c) Aide : six s'écrit 11 en base cinq. Réponse : 1343331

5.

2111

6.

Les nombres représentés sont égaux, ce qui donne, en tenant compte des rangs : $x = y^2$

Ceci est possible.

Exemple : $x = 9$ et $y = 3$

(cas général : $x = y^2$)

7.

2003 : 10 a pour quotient 200 et pour reste 3

a) Pour diminuer le quotient de 2 en ôtant le plus possible, on ôte 20 et 3, donc 23

(vérification : $1980 : 10$ a pour quotient 198 et reste 0)

b) Pour augmenter le quotient de 3 en ajoutant le moins possible, on complète le reste avec 7 et on ajoute 20. On ajoute donc 27.

(vérification : $2030 : 10$ a pour quotient 203 et comme reste 0)

8.

a) En base quatre, les rangs sont $4^3 = 64$, $4^2 = 16$, 4 et 1

Seuls interviennent les deux derniers chiffres, puisque ceux des autres rangs représentent des quantités multiples de huit.

Les deux derniers chiffres doivent donc former un multiple de huit.

Autre façon de l'exprimer : les deux derniers chiffres sont 00 ou 20.

b) En base six, les rangs sont $6^3 = 216$, $6^2 = 36$, 6 et 1

Seuls interviennent les deux derniers chiffres, puisque ceux des autres rangs représentent des quantités multiples de trente-six.

Ces deux derniers chiffres doivent être nuls, donc le nombre doit se terminer par 00.

9.

$\frac{2}{3}$

En base dix : 0,66666.....

En base cinq : une unité vaut cinq cinquièmes.

On prend trois et parmi ces trois deux. Nombre obtenu à ce stade 0,2

Il reste deux à partager en dix 25^e .

De ces dix, on prend 9 et parmi ces 9 deux tiers, soit six, dont cinq forme une unité de rang directement supérieur. Nombre obtenu à ce stade $0,2 + 0,11 = 0,31$

Il reste 1 et on revient à la situation de départ, donc la période se répète et le nombre réponse est 0,313131.....

En base six : 0,4

$\frac{1}{4}$

En base dix : 0,25

En base cinq : 0,1111..... (cf caractère de divisibilité par neuf en base dix)

En base six : 0,13

10.

$3 + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{16} = 3 + \frac{1}{16} = 3,0625$

11.

23 est un nombre décimal : on peut le mettre sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de dix $\frac{23}{1} = \frac{230}{10}$

23 est un nombre à virgule : on peut l'écrire 23,00000.....

12.

a) $\frac{20}{10} + \frac{14}{990} (= \frac{1980 + 14}{990} = \frac{1994}{990} = \frac{997}{495})$

b) $324,45 + \frac{678}{999000} = \dots$

13. REMEDICATIONS

13.1. Bases

Lien avec le cours : p. 13 à 19 2.2.3 Bases, Exercices, Aspects méthodologiques

Conseils :

1. Relire le cours et les notes en notant les questions au fur et à mesure.
2. Lire les explications qui suivent.
3. Reprendre les questions et les exercices qui posent problème et noter les questions qui restent.
4. Poser les questions qui restent au début du cours suivant (sinon à la pause, sinon par mail ou sur le forum).

Première idée : notion de groupement

Dans la vie quotidienne, il est courant de recourir à des groupements.

Dans la vie quotidienne, les groupements les plus courants sont ceux par deux (chaussettes,) et par cinq (comptages IIIII, ...) mais il en existe d'autres : 7 (jours de la semaine), 6 ou 12 (bouteilles, tétrabriques),

Deuxième idée : notion de base

Notre système de numération écrit fonctionne avec des groupements successifs par dix : unités, dizaines, centaines, C'est cette idée de passages à chaque fois d'une unité d'un rang à une unité d'un rang juste supérieur qui doit être comprise : c'est cela l'idée de base de numération. Ces passages se font, pour la base dix, à dix, cent, mille, ... Si le premier groupement est facilement perceptible (dix unités égalent une dizaine), les groupements suivants se font pour des quantités plus difficiles à se représenter (dix dizaines égalent une centaine).

Utiliser une base plus petite que dix avec les enfants va aider à mieux faire comprendre ce qui se passe. De même, dans le cadre de la formation, l'utilisation d'autres bases que dix va aider à « casser les automatismes » et à mieux prendre conscience des difficultés de compréhension que ce sujet présente pour les enfants.

Introduction avec les enfants : jeux d'échanges successifs du type « jeu de la banquière » présenté dans le cours p. 18.

13.2. Preuve par neuf**Principe**

On a deux nombres et une opération (en général, une multiplication).

Calculer le reste de chaque nombre quand on le divise par neuf, ce qui donne r_1 et r_2

(On utilise ici le caractère de divisibilité par neuf : le reste de la division d'un nombre par neuf est la somme de ses chiffres, dont on calcule encore la somme si nécessaire pour arriver à un nombre compris entre 1 et 9 : ceci revient à effectuer une addition modulo 9).

Effectuer l'opération demandée (en général, une multiplication).

Vérifier si le reste du résultat quand on le divise par neuf r_3 est égal à au reste r_4 du résultat de l'opération effectuée sur les restes de départ r_1 et r_2 .

Justification

Les deux nombres de départ peuvent s'écrire $(9q_1 + r_1)$ et $(9q_2 + r_2)$.

Le reste r_4 de la division par neuf du résultat de l'opération

$(9q_1 + r_1) \cdot (9q_2 + r_2) = 81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9r_1q_2 + r_1 \cdot r_2$ vaut $r_1 \cdot r_2$.

Le reste r_4 peut donc se calculer directement à partir des restes de départ r_1 et r_2 .

Le reste r_3 de la division par neuf du résultat doit être égal à r_4 , sinon il y a une erreur.

Exemple pour 34 X 578

Restes de chaque nombre après division par neuf : $r_1 = 3+4 = 7$; $r_2 = 5+7+8 = 20$ qui revient à 2

Produit $34 \times 578 = 19652$

Reste du produit : $r_3 = 1+9+6+5+2 = 23$ qui revient à 5

Opération effectuée sur les restes : $r_4 = 7 \times 2 = 14$ qui revient à 5

Les deux restes r_3 et r_4 sont égaux, donc la preuve par neuf est vérifiée.