GEOMETRIE : 2^E PARTIE

1. SOLIDES

1.1. CLASSIFICATIONS

1.1.1. Généralités et premiers classements

Préliminaire :
Lorsque l'on aborde l'observation des solides, il est essentiel d'utiliser des modèles réels et non des représentations en perspective de ces objets. On familiarisera ensuite les élèves avec différentes représentations.
Les différentes manipulations et exploitations verbales permettront aux enfants d'acquérir une grande quantité de vocabulaire, présenté dans une situation où il est utile (rangement, désignation d'objets), mais il est évident qu'on ne se limitera pas au seul vocabulaire, il y a d'autres enjeux plus importants tels l'exploration de l'environnement, les propriétés de certains objets, les classements, …

Définition (rappel)
Nous appellerons solide toute partie de l'espace creuse ou pleine délimitée par une surface indéformable. Par indéformable, il faut entendre que la distance de deux quelconques de ses points reste constante.

Remarque : On utilise dans la langue française ce même terme de solide pour désigner la surface qui le limite, par exemple dans les expressions "solide creux" ou "solide plein".
Généralement, le contexte permet de reconnaître de quelle acception il s'agit.

Premiers classements

<table>
<tr><th>Les polyèdres</th><th colspan="2">Les non-polyèdres</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Toutes les faces sont des polygones.</td><td colspan="2">Il y a une face non polygonale.</td></tr>
<tr><td>Hybrides</td><td>Corps ronds</td></tr>
<tr><td>Certaines faces sont des polygones mais pas toutes.</td><td>Aucune face n'est un polygone.</td></tr>
</table>

Les convexes	Les concaves
Tout segment dont les extrémités appartiennent au solide est entièrement inclus dans ce solide.	Il y a au moins un segment dont les extrémités sont des points du solide et qui n'est pas entièrement inclus au solide.

Méthodologie
Une approche originale : cf. Michel Demal.

1.1.2. Les polyèdres

Définition classique : On appelle polyèdre tout solide limité par des polygones.

Terminologie

Face : chacun des polygones (plans) qui forment la surface délimitant le solide.
Arête : chacun des côtés de ces polygones
Sommet : chacun des sommets de ces polygones
Angle polyèdre : angle solide formé par toutes les arêtes issues du même sommet.

Propriétés

Tout polyèdre contient au minimum 4 faces.
En chaque sommet, il arrive au minimum 3 arêtes et 3 faces.

Méthodologie

Les faces sont planes et se montrent avec le plat de la main.
Les arêtes sont des segments droits et se montrent en les longeant avec l'index.
Les sommets sont des points et se montrent du bout du doigt.
On compte le nombre de faces, le nombre de sommets et le nombre d'arêtes.
Pour effectuer les comptages, il est conseillé de ne pas tourner le polyèdre.

Classement selon le nombre de faces
On distingue particulièrement les tétraèdres (4 faces), les hexaèdres (6 faces), les octaèdres (8 faces), les dodécaèdres (12 faces) et les icosaèdres (20 faces)

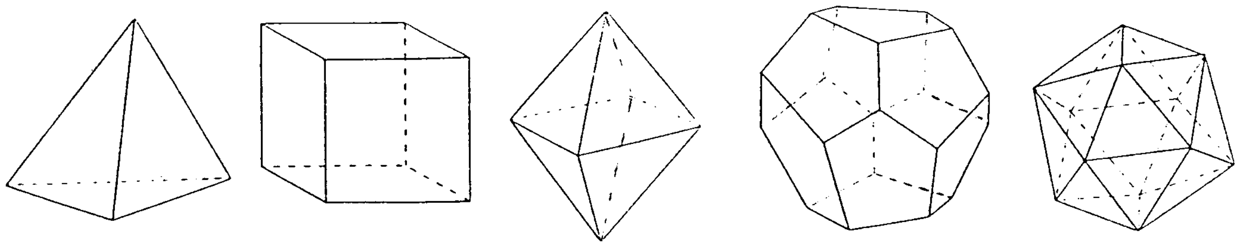
Classement selon la régularité

Un polyèdre est régulier ssi toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et
tous ses angles polyèdres sont égaux.

Il faut donc vérifier que toutes les faces sont des polygones réguliers isométriques et ensuite que tous ses sommets appartiennent au même nombre d'arêtes ou de faces (angles polyèdres superposables)

Théorème : Il n'existe que **cinq** polyèdres réguliers convexes.

Type de faces	Nbre de faces	Nom	Nbre de sommets	Nbre d'arêtes
triangles équilatéraux	4	**tétraèdre régulier**	4	6
triangles équilatéraux	8	**octaèdre régulier**	6	12
triangles équilatéraux	20	**icosaèdre régulier**	12	30
carrés	6	**cube (ou hexaèdre régulier)**	8	12
pentagones réguliers	12	**dodécaèdre régulier**	20	30



Lien entre le nombre de faces (F), de sommets (S) et d'arêtes (A) :

Relation d'Euler : $F + S = A + 2$

Classement selon la forme
On distingue alors les prismes et les pyramides, et ensuite leurs cas particuliers.

Remarque : Il existe aussi un classement permettant de distinguer les parallélépipèdes.

1.1.3. Prismes et pyramides

Prismes

Définitions générales

Une surface prismatique est une surface formée de l'ensemble des droites de direction donnée et s'appuyant sur un polygone situé dans un plan sécant à ces droites.
Un prisme est obtenu en coupant une surface prismatique par 2 plans strictement parallèles et parallèles au polygone.

Remarques
Une surface prismatique est illimitée puisqu'on considère des droites, et n'est donc pas un solide.
Un prisme est limité : c'est un solide.
Les sections obtenues en coupant une surface prismatique par 2 plans strictement parallèles entre eux et sécants aux droites qui la forment sont 2 polygones superposables dont les côtés correspondants sont parallèles : ce sont les bases du prisme.

Définitions (Ecole primaire)
- *Prisme* : solide constitué par deux polygones parallèles et isométriques, et l'ensemble des segments parallèles joignant le contour des deux polygones de base.

- *Bases d'un prisme* : deux polygones superposables dont les côtés sont respectivement parallèles et possédant une arête en commun avec chaque autre face du prisme.
- *Faces latérales d'un prisme* : faces non bases du prisme. Ces faces sont des parallélogrammes.
- *Arêtes latérales d'un prisme* : arêtes joignant les sommets correspondants des bases.
- *Hauteur d'un prisme* : distance entre les deux bases

Nomenclature : Un prisme est qualifié par la forme de ses bases.

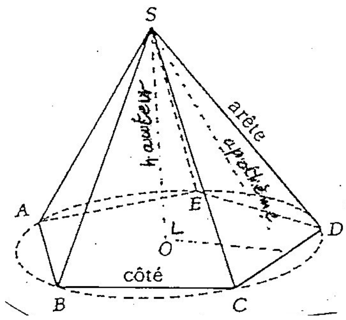
Cas particuliers
- *Prisme droit* : prisme dont les arêtes (et les faces) latérales sont perpendiculaires aux bases
- *Prisme régulier* : prisme droit dont les polygones des bases sont réguliers.
- *Parallélépipède* : prisme dont les polygones de base sont des parallélogrammes (ou hexaèdre dont toutes les faces sont des parallélogrammes).
- Remarques : - les faces opposées sont // et isométriques
  - chaque paire de faces opposées peut être considérée comme bases.
- *Parallélépipède rectangle* : prisme droit dont les polygones de base sont des rectangles (ou hexaèdre dont toutes les faces sont des rectangles).
- *Cube* : hexaèdre (ou parallélépipède) dont toutes les faces sont des carrés.

Pyramides

Pyramide :
- solide limité par un angle polyèdre coupé par un plan ne passant pas par son sommet (définition adulte)
- solide constitué par un polygone, un sommet extérieur au plan du polygone, et l'ensemble des segments joignant ce sommet à un point du contour du polygone de base.
- polyèdre dont tous les sommets sauf un appartiennent à un même plan.
- polyèdre caractérisé par une base et un sommet, toutes les faces autres que la base (faces latérales) sont des triangles ayant un côté commun avec la base et dont le sommet opposé à ce côté est le sommet de la pyramide.

La hauteur d'une pyramide est la distance entre la base et le sommet
La pyramide est qualifiée selon le polygone de base.
Par exemple, les pyramides du Caire sont des pyramides à base carrée.

Remarque : la pyramide triangulaire est un tétraèdre; chaque face peut être choisie comme base.
Méthodologie : on peut introduire la notion de pyramide à l'aide d'un polygone et d'un point extérieur au plan du polygone.



Pyramide droite : pyramide dont le centre du polygone de base est le pied de
la hauteur abaissée du sommet.
Pyramide régulière : pyramide dont le polygone de base est régulier et dont le
centre de la base est le pied de la hauteur abaissée du sommet.

Dans une pyramide régulière, les arêtes latérales sont isométriques et les faces
latérales sont des triangles isocèles isométriques.
Apothème d'une pyramide régulière : hauteur des triangles isocèles latéraux.

Exercices

1. Réaliser la « carte d'identité » d'un polyèdre donné.
   Trouver plusieurs développements de ce polyèdre, et si possible tous. (à domicile)
   Construire ensuite ce polyèdre à l'aide de pailles et plasticine ou « volumes à construire ».
   Tailler le polyèdre en oasis, pomme de terre ou plasticine.

2. Donner un exemple de polyèdre non régulier dont
   - tous les angles polyèdres sont égaux
   - toutes les faces sont des polygones réguliers

3. Etablir un tableau reprenant les différents types de prismes.

4. Un prisme régulier peut-il être un polyèdre régulier ? Un polyèdre régulier peut-il être un prisme régulier ? Répondre par "oui"/"non"/"toujours"/"parfois" ou "jamais". Donner des exemples. Justifier avec précision.

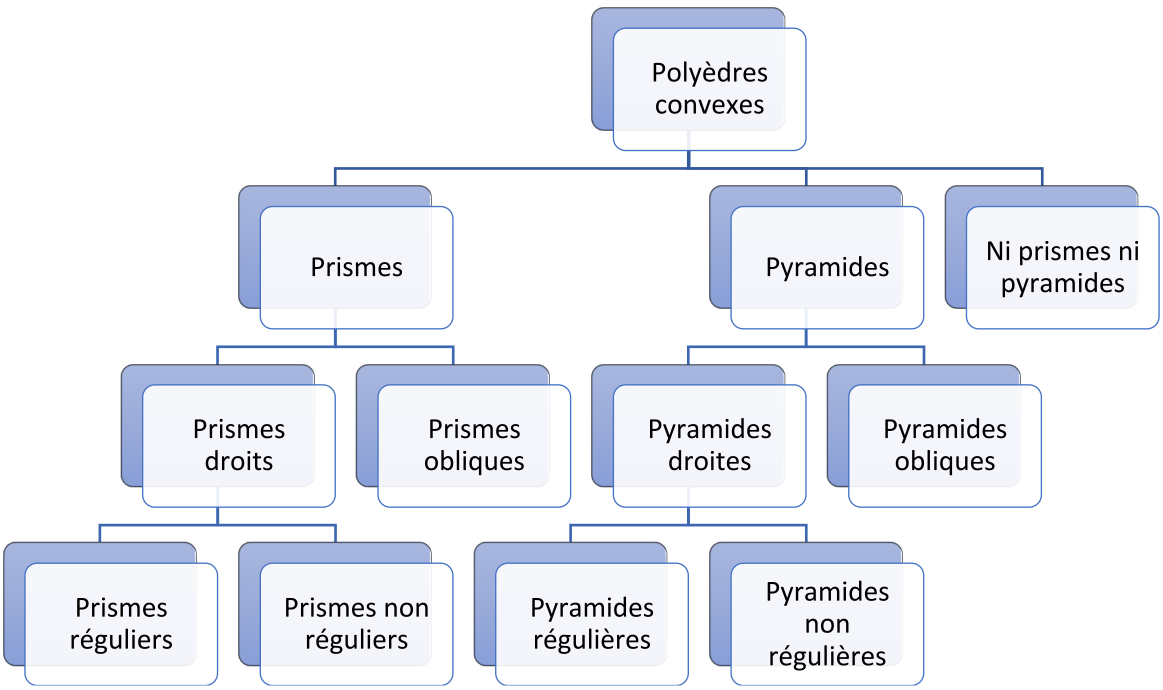
5. Comptages de sommets, arêtes, faces de polyèdres : comparaison des procédés utilisés (modèles à disposition)

6. Construire un exemple de pyramide droite non régulière.

Applications

1. Dans une pomme de terre, tailler « son prisme ».
   Ce type d'exercice fait repérer les parallèles, les angles, les proportions.

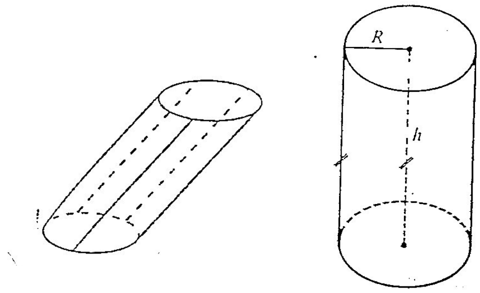
2. Pour travailler les directions, on peut demander de construire un cube avec des morceaux de paille : les arêtes parallèles doivent avoir la même couleur, les arêtes non parallèles doivent être de couleurs différentes.



1.1.4. **Solides non-polyèdres**

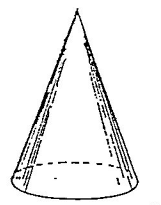
On distingue les corps ronds dont aucune face n'est un polygone et les corps hybrides dont au moins une face est un polygone et une autre n'est pas un polygone.
Nous étudierons ici quelques solides de révolution : solides engendrés par la rotation d'une surface autour d'un axe.
Nous nous limiterons aux cas particuliers du cylindre, du cône et de la boule.

Définitions
Cylindre : solide constitué par deux disques parallèles et isométriques, et l'ensemble des segments parallèles joignant les deux cercles de base.
Cylindre droit ou cylindre de révolution : solide engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés.
Une génératrice d'un cylindre droit est un segment parallèle à l'axe de rotation situé sur la surface latérale.
Les bases sont deux disques parallèles et isométriques dont le rayon sera noté R.

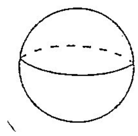


cylindre de révolution

Cône : solide constitué par un disque, un sommet extérieur au plan du disque, et l'ensemble des segments joignant le sommet du cône à un point du cercle de base.
Cône droit ou cône de révolution : solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.
Une génératrice du cône est un segment déterminé par le sommet du cône et un point du cercle de base.
Par analogie avec la pyramide, il peut être appelé apothème a
On a la relation $a^2 = h^2 + R^2$.


cône de révolution

Sphère et boule
Boule : solide engendré par la rotation d'un demi-disque autour de son diamètre (ou ensemble des points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R du centre, R étant le rayon de la boule).
Sphère : surface limitant la boule (ou ensemble des points de l'espace situés à une distance R du centre, R étant le rayon de la sphère).

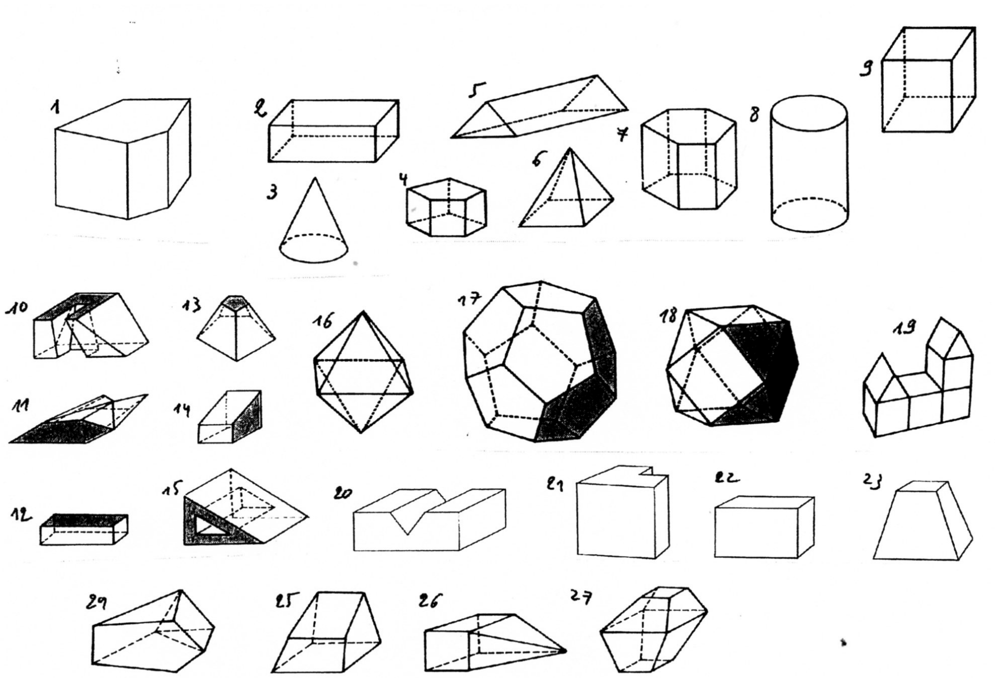


Autres solides non-polyèdres
Solides de révolution : ellipsoïde, ovoïde, paraboloïde, tore (non convexe),...

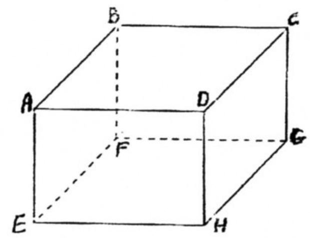
1.2. REPRESENTATION EN PERSPECTIVE

Perspective cavalière
Cette représentation conserve l'alignement des points et le parallélisme.
Par contre, l'amplitude des angles et la longueur des côtés ne seront pas conservées.
Par convention, les traits vus seront tracés en continu, et les traits cachés en discontinu.

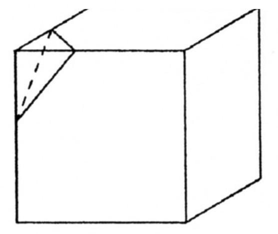
Exercices
1. Description de solides dont on donne une représentation en perspective :



2. Voici la représentation en perspective cavalière d'un parallélépipède rectangle tel que ||eh|| = 3 cm, ||hg|| = 4 cm et ||cg|| = 2 cm.
   Calculer ||ec||.



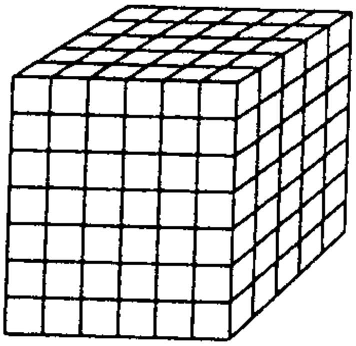
3. On coupe l'angle d'un cube comme indiqué ci-contre.
   Quel est le nombre de faces, de sommets et d'arêtes du solide obtenu une fois ce bout enlevé ?



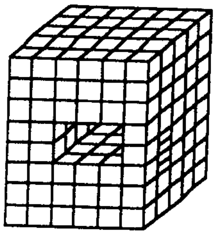
Méthodologie : quelques idées
On donne un solide (cube par exemple) en pailles ou « volumes à construire ».
On demande de le représenter (photo) comme on le voit, comme un autre le voit.

Exercices

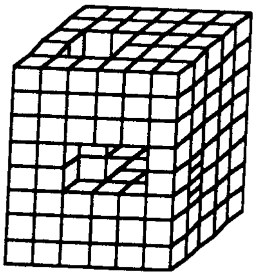
1. Problème présenté sous la forme visuelle[1]
   Voici un solide. Ce solide est fait avec de petits cubes.



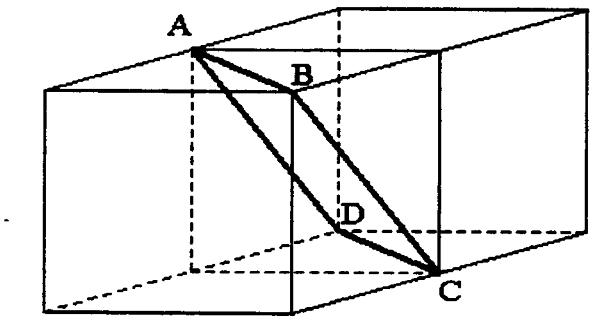
   a) Combien faut-il de petits cubes pour construire ce solide ?
   b) Combien faut-il enlever de petits cubes au solide pour obtenir le solide suivant ?



   c) Dans le solide précédent, on fait un autre tunnel. Combien faut-il enlever de cubes ?



2. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?



Entraînement

On fait un dessin sur une feuille, puis on le cache et on demande de le dessiner.
On fait pivoter dessin et cache et on demande de dessiner.

[1] A. Taurisson, « *Les chemins de la réussite en mathématique à l'élémentaire »,* Ed. Nouvelles, Montréal, 1995, p. 31 à 44

Même exercice avec des cubes : on les place ou on les dessine, puis on cache et on demande de poser les cubes.
On peut faire pivoter et demander de poser les cubes.

Exemples d'activités

- Structuro
- Legos : reproduction d'un modèle; création d'un modèle
- Jeu "block out", sorte de tetris à 3 dimensions
- "Mises en boîte"[1], (1ère - 2e primaire)
  Plusieurs classes ont une boîte identique et un matériel semblable (boîte d'allumettes, couvercle, pot, boîte de conserve, clou, punaise, allumette, marqueur, élastique, pièce de monnaie).
  Une classe doit donner des indications à l'autre pour reproduire l'agencement des objets dans la boîte.
- Utilisations du cube SOMA[2] (refaire un cube, trouver d'autres constructions : canapé, baignoire, …, les reproduire)

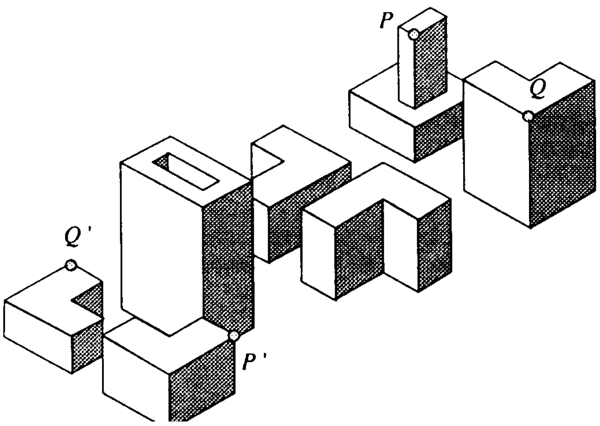
Document à consulter

CREM : *Représenter et se représenter des situations dans l'espace* (1997-1998)
Les diverses activités constituent une progression intéressante.

1. Se repérer à l'aide d'un plan de quartier
2. Reconstituer un paysage (maisons - décor - maquette)
3. Représenter un paysage
4. Représenter une maisonnette en perspective cavalière
5. Voir une boîte dans sa tête et la représenter
6. Lire des plans d'architecte
7. Dessiner trois vues d'une chaise
8. Profil - face - dessus

Application[3]

Voici une vue aérienne d'un complexe d'habitations

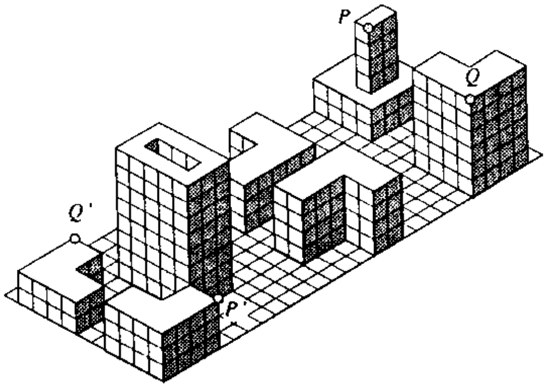


1. Une personne se trouvant au sommet d'une tour, en p, peut-elle voir quelqu'un en p' ? même question pour q et q'
2. Quel est le volume des immeubles représentés sur le dessin ?
3. Quelle est la superficie sur laquelle les buildings sont construits ?

---

[1] DESMARETS A., JADIN B., ROUCHE N., SARTIAUX P., *Oh, moi les maths …,* Talus d'approche, Bruxelles, 1997, p. 77 à 82
[2] KUZNIAK A. - TAVEAU C., *Travaux géométriques 6e,* Nathan Pédagogie, Paris, 1998
[3] DESMARETS A., JADIN B., ROUCHE N., SARTIAUX P., *Oh, moi les maths …,* Talus d'approche, Bruxelles, 1997, p. 31 à 38

4. Construire la situation à l'aide de blocs.
5. Représenter cette situation sur une trame. Détruire la construction et demander à quelqu'un de reproduire les constructions à l'aide de la représentation uniquement



Exercices récapitulatifs

1. Y a-t-il un solide qui est à la fois une pyramide et un prisme ?
2. Un prisme régulier peut-il être un polyèdre régulier ?
3. Une pyramide régulière peut-elle être un polyèdre régulier ?
4. Un prisme droit peut-il être un parallélépipède ?
5. Y a-t-il des prismes droits qui ne sont pas des parallélépipèdes ?
6. On donne 12 tiges rigides de même longueur qui constituent les arêtes d'un solide. Quel(s) type(s) de polyèdre peut-on construire ? Faire pour chaque type le dessin en perspective et la fiche d'identité (dans un ordre logique).
7. Rechercher tous les tétracubes (un tétracube est un solide obtenu par assemblage de quatre cubes identiques collés face contre face). Les dessiner ensuite.

1.3. DEVELOPPEMENTS

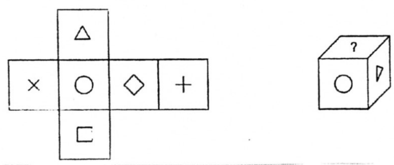
Exercices

1. Développements de prismes :
   - Parallélépipède rectangle 2 cm x 4 cm x 6 cm
   - Prisme dont la base est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 cm et 6 cm, la hauteur mesurant 5 cm.

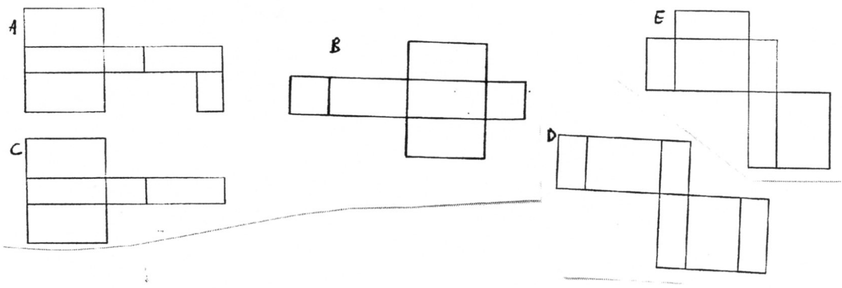
   Comment peut-on vérifier rapidement le résultat ?

2. Trouver tous les développements possibles pour un cube

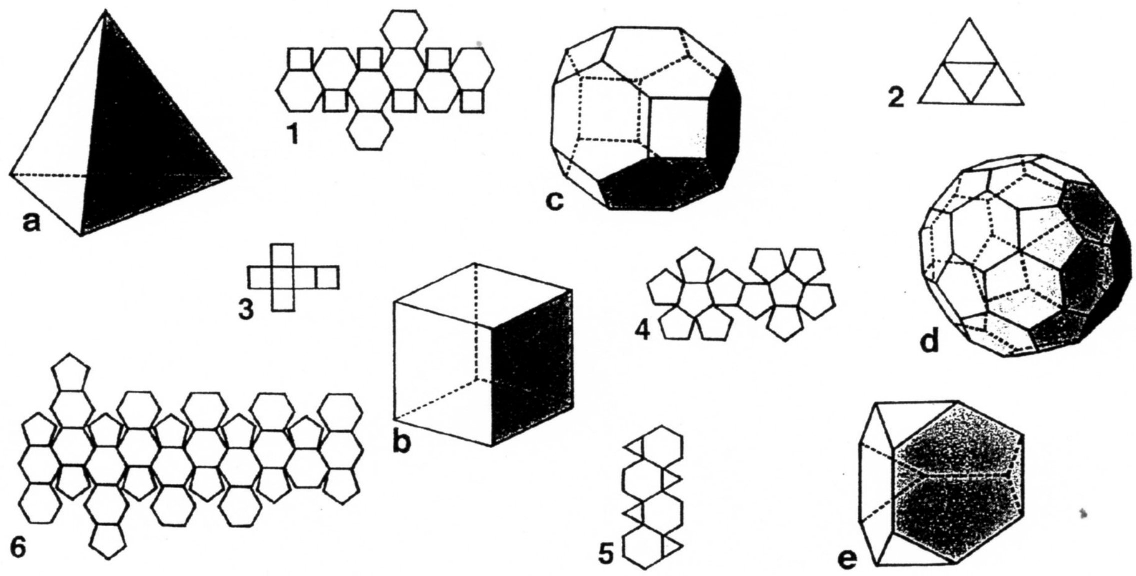
3. Le patron ci-dessous est celui d'un cube. Quel est le dessin de la face du dessus ?

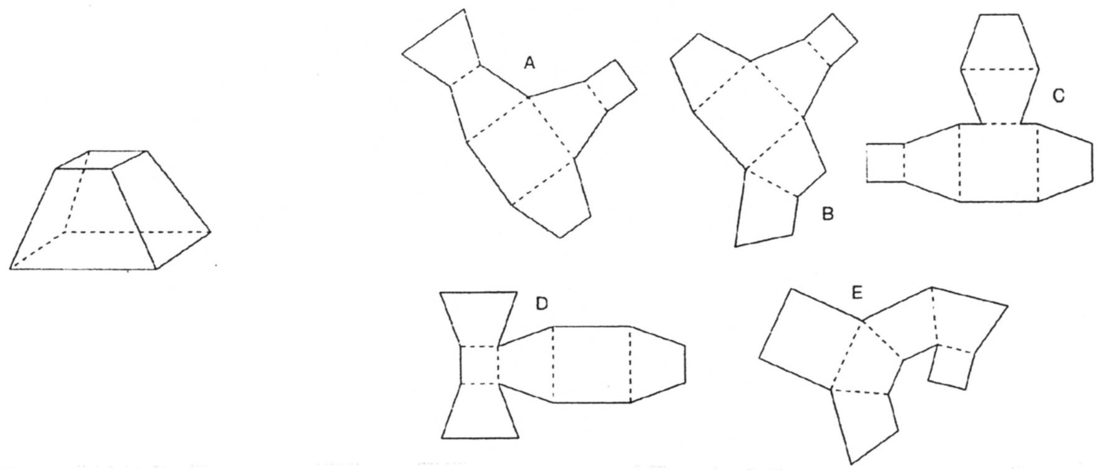


4. Reconnaître si les développements proposés sont ceux d'un prisme et préciser le nom du solide



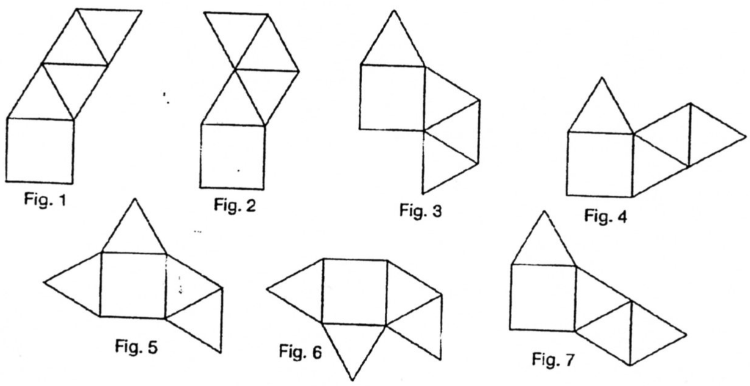
5. Associer à chaque solide son ou ses développement(s) possibles.

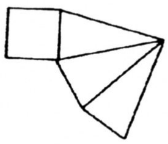


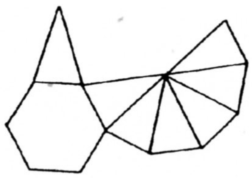


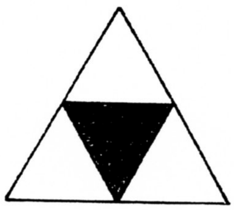
6. Développements de pyramides régulières sachant que
- La base est un carré de 4 cm de côté et une arête latérale mesure 6 cm
- la base est un carré de 4 cm de côté et l'apothème mesure 8 cm
- la base est un carré de 4 cm de côté et la hauteur mesure 3 cm

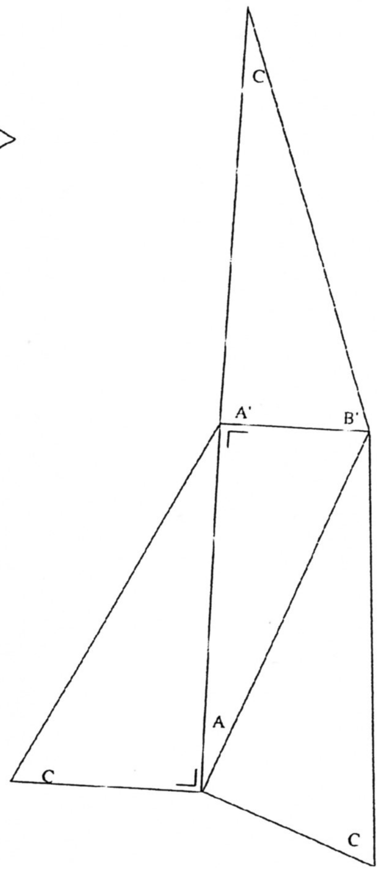
7. Reconnaître si le développement proposé est celui d'un solide et préciser son nom.











Applications

On donne un polyèdre (prisme droit à base triangulaire, à base trapézoïdale, …)
On demande plusieurs développements.
Ensuite, on demande de trouver tous les développements, ou une méthode pour les trouver.
Pour quelques développements, on demande de colorier de la même couleur les arêtes qui vont se superposer.
On peut construire le solide à l'aide des « volumes à construire ».

On propose des carrés, puis de petites étiquettes pour coller les arêtes : il faut chaque fois commander « le bon nombre ».
A l'aide de ce matériel si nécessaire, trouver tous les développements du cube (avantage : le matériel proposé est « mobile »).

Développement d'un cône :
On connaît le rayon de la base R et l'apothème a.
On doit trouver α, qui intercepte un arc de longueur $2\pi R$ sur un cercle de rayon a.
L'angle au centre et l'arc de cercle de rayon a sont des grandeurs directement proportionnelles.

Conclusion : $\alpha = \dfrac{360° \text{ x R}}{a}$

La sphère n'est pas développable. En effet, elle ne peut pas être étendue sur un plan.
(voir cartes de géographie).

Exercices

1. Développer un cylindre dont le rayon de la base mesure 3 cm et la hauteur 5 cm. En déduire la mesure de son aire latérale, de son aire totale.

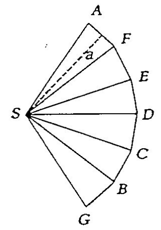
2. Développer un cône dont
   - le rayon de la base mesure 4 cm et la hauteur 6 cm.
   - le rayon de la base mesure 4 cm et l'apothème 6 cm

1.4. AIRES ET VOLUMES

Introduction de la notion de volume
- Remplissage de "boîtes" à l'aide d'objets étalon
  (→ utilisation d'étalons non conventionnels)
- Utilisation d'étalon conventionnel
- Volume du parallélépipède rectangle
  (Idée : trouver le nombre de cubes contenus dans une boîte sans les compter → comparaison des stratégies utilisées : comptage total, comptages "par couche" et addition, multiplication)

Aire latérale du prisme droit : $A_l = P_b.h$ où P_b est le périmètre de la base
Aire totale du prisme droit : $A_t = A_l + 2.A_b$ où A_b est l'aire de la base

Aire latérale de la pyramide régulière :
$A_l = \frac{P_b.a}{2}$ où P_b est le périmètre de la base et a l'apothème



Aire totale de la pyramide régulière :
$A_t = A_l + A_b$ où A_b est l'aire de la base

Principe de Cavalieri
« Si des figures solides quelconques sont construites entre les mêmes plans parallèles, et si dans ces figures, tout plan parallèle mené à égale distance des plans parallèles découpe des figures planes égales, les figures solides sont de même égales entre elles ».

Ce principe permettra de généraliser les formules trouvées pour les volumes de solides particuliers à des situations plus générales.

Volume du prisme quelconque : $V = A_b . h$
La mesure du volume du prisme est égale au produit de l'aire de la base par la hauteur.

Volume de la pyramide (quelconque) :
Tout prisme quelconque peut se partager en 3 prismes de même base et de même hauteur.
$V = \frac{A_b . h}{3}$
La mesure du volume du prisme est égale au tiers de produit de l'aire de la base par la hauteur.

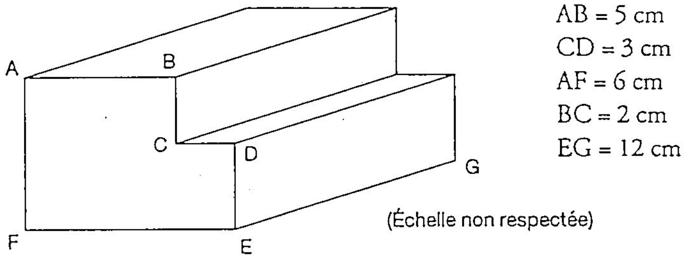
(Plusieurs possibilités méthodologiques : découpage d'un cube en 3 (ou en 6) pyramides identiques, découpage d'un prisme triangulaire en trois polyèdres de même volume, utilisation des capacités d'un prisme et d'une pyramide de même base et même hauteur)

Aires et volume de corps ronds
Cylindre
La surface latérale peut être vue comme un rectangle enroulé
Aire latérale : $A_l = 2\pi Rh$ Aire totale : $A_t = A_l + 2\pi R^2$ Volume : $V = \pi R^2 h$

Cône
La surface latérale peut être vue comme un triangle curviligne enroulé
Aire latérale : $A_l = \pi Ra$ Aire totale : $A_t = A_l + \pi R^2$ Volume : $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

Exercices

1. Quel est le nom du solide ci-contre ?
   On désire peindre toutes ses faces.
   Quelle est la surface à peindre ?

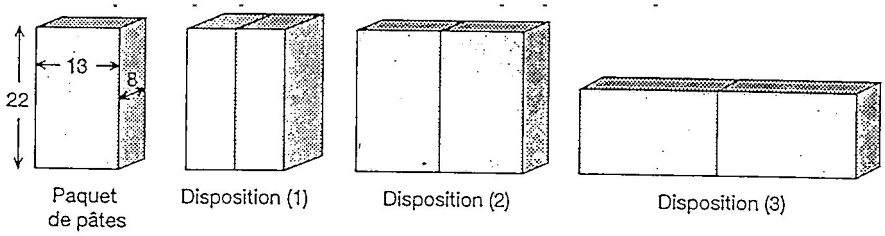


2. Combien de cubes de 8 cm de côté peut contenir une boîte cubique de 24 cm d'arête ?

3. Calculer le volume d'un cube dont l'aire totale est de 150 cm².

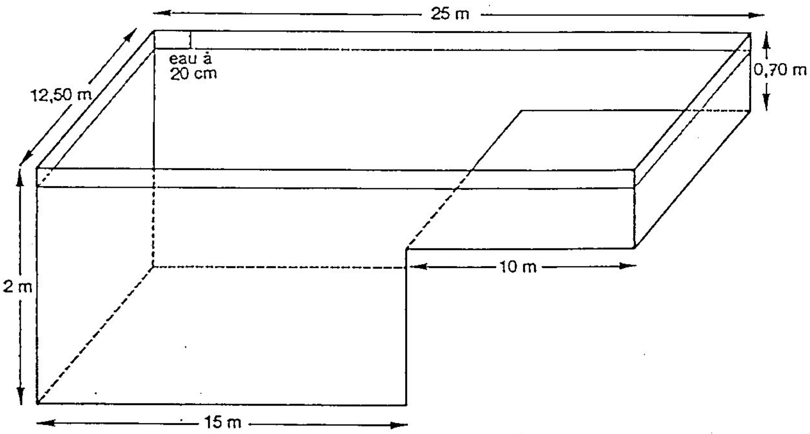
4. Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle dont l'aire totale mesure 94 cm², l'aire latérale 70 cm² et la hauteur 5 cm.

5. Un fabricant de pâtes désire utiliser un film plastique pour emballer deux paquets de pâtes. Il y a trois dispositions possibles présentées ci-contre. La surface du film est-elle la même dans les trois cas ? Et le volume total ?



6. Calculer l'aire latérale et le volume d'un prisme régulier à base hexagonale dont toutes les arêtes mesurent 3 cm.

7. Monsieur Javel, employé de la piscine, est bien ennuyé. Il doit verser dans l'eau, qui vient d'être entièrement renouvelée après les travaux, du produit désinfectant. Il faut en verser 5 cl par m³ d'eau. Calculer pour lui le cubage du bassin ainsi que la quantité de produit à verser, en utilisant les dimensions figurant sur le dessin, qui n'est pas à l'échelle.



8. On veut ficeler, dans le sens de la longueur et dans le sens de la largeur, un paquet rectangulaire de 40 cm de long, de 30 cm de large et de 20 cm de hauteur. Trouver la longueur nécessaire de ficelle, en tenant compte de 25 cm pour les noeuds.

9. Autour d'un champ carré de 14,5 m de côté, et à l'intérieur, on a creusé un fossé de 0,45 m de largeur et de 0,60 m de profondeur. Quel est le volume de la terre enlevée et quelle surface reste-t-il à cultiver ?

10. Il est tombé cette nuit 30 litres d'eau par mètre carré.
    Quelle hauteur d'eau cela représente-t-il ?

11. Un petit cube est rempli d'eau. On verse cette eau dans un grand cube dont l'arête est double de celle du petit cube. Expliquer, sans faire aucun calcul de volume, à quelle hauteur l'eau montera dans le grand cube.

12.Une citerne remplie d'eau a pour base un rectangle de 2,80 m sur 2,50 m. Sa profondeur égale 1,65 m. On en retire 35 hl. Quelle est la hauteur de l'eau qui reste dans la citerne ?

13.Une salle de conférence mesure 10 m de long, 7,5 m de large et 4,2 m de haut. De combien faut-il élever le plafond de cette salle, si l'on veut qu'elle puisse contenir 250 personnes disposant chacune de 1,5 m³ d'air ?

14.Un jardin a la forme d'un trapèze. La grande base mesure 42 m. La petite base mesure les 2/3 de la grande et la hauteur mesure 5 m de moins que la petite base. On recouvre ce jardin d'une couche de sable uniforme. Calculer son épaisseur sachant que l'on a payé 1386 F à raison de 15 F le mètre cube le sable nécessaire.

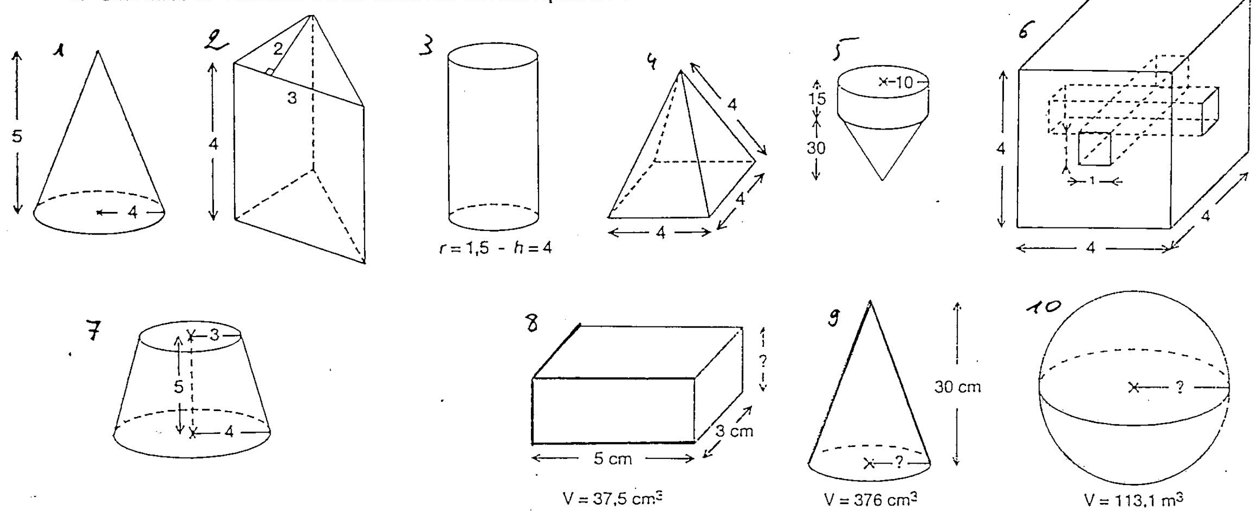
15.La grande pyramide d'Egypte, ou pyramide de Khéops, a pour dimensions actuelles : hauteur : 137 m, côté : 230,38 m. Calculer l'apothème, la longueur des arêtes, l'aire de la base, l'aire latérale et le volume de la pyramide.

16.Calculer l'aire totale et le volume d'une pyramide régulière à base triangulaire dont un côté de la base mesure 3 cm et la hauteur 8 cm.

Exercices de synthèse

1.

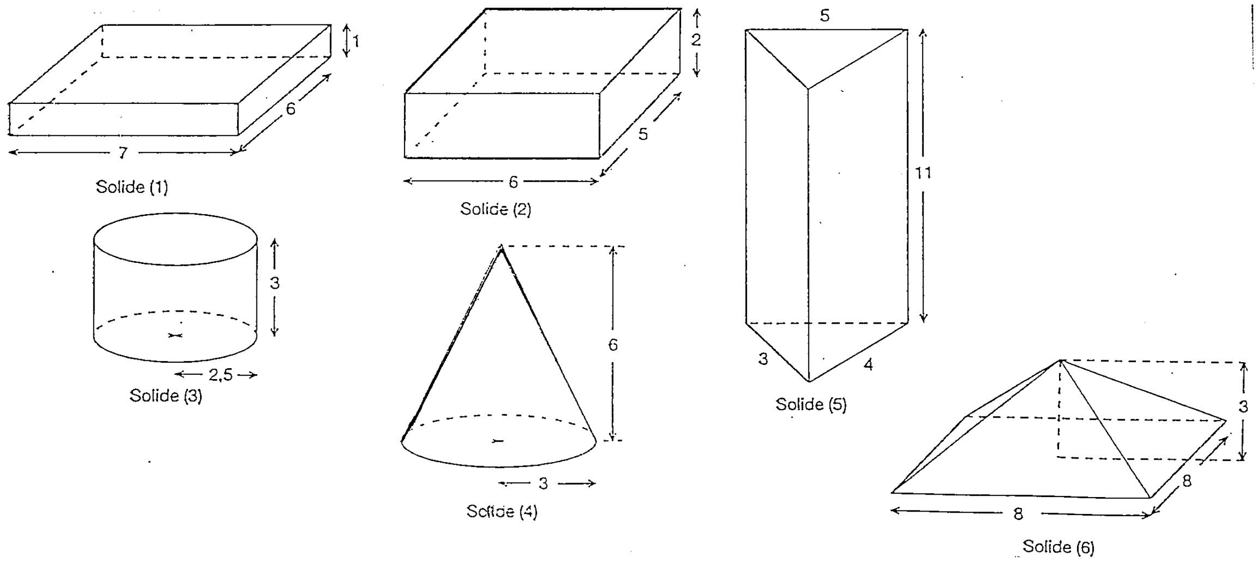
1. Calculer le volume ou la dimension manquante :



2. On verse 3 litres d'eau dans un récipient cylindrique dont le rayon mesure 10 cm et la hauteur 12 cm. L'eau débordera-t-elle ? Si non, à quelle hauteur arrivera-t-elle ?

3. Une sorbetière a la forme d'un pavé droit de dimension 16 cm sur 12 cm sur 10 cm. Elle est remplie au 4/5 de glace. Combien de demi-boules de glace peut-on faire avec une cuillère de glace dont le diamètre est de 45 mm ?

4. Classer du plus petit au plus grand chacun de ces solides. Les mesures sont exprimées en m.



5. En enroulant une feuille de papier de format 21x29,7 (cm), on peut obtenir deux “cylindres”. Comparer les volumes de ces deux cylindres.

6. Une piscine a une forme rectangulaire, de 25 m sur 12 m. La profondeur varie régulièrement de 0,90 m à 3 m. Calculer l’aire latérale, l’aire du fond et le volume, la piscine étant remplie à ras bord.

7. Un mini berlingot est assimilable à un tétraèdre. Les faces sont des triangles isocèles de base 44 mm et dont les côtés issus du sommet opposé à cette base mesurent 75 mm. Déterminer l’aire et le volume.

8. Un camembert a 3 cm de hauteur et 10,6 cm de diamètre. Trouver son aire et le volume utile sachant que la croûte a une épaisseur uniforme de 3 mm.

9. On donne un cône de rayon R et de 6 cm de hauteur; Quelle hauteur faut-il donner à un cylindre ayant une base de rayon R, pour qu’il ait le même volume que le cône ?

10. Un propriétaire a fait maçonner un puits de 3,75 m de profondeur, 1,7 m de diamètre extérieur et 1,2 m de diamètre intérieur. Calculer le prix de revient de la maçonnerie à raison de 800 F le mètre cube. Combien le puits contient-il d’hectolitres quand l’eau s’y élève à 1,5 m ?

11. Quel est le rapport entre le volume de la Terre (6378 km de rayon) et celui de la Lune (1738 km de rayon) ?

Correction d'exercices sur les aires et volumes de solides

p. 15 n°5
Une façon de faire est de chercher la surface de contact la plus grande possible → disposition 1 plus économique que disposition 2 qui est plus économique que la disposition 3
Une autre possibilité est de calculer l'aire totale dans chaque cas, ce qui donne le même résultat (bien plus tard !)
Le volume est évidemment identique.

p. 15 n°7
Calcul du cubage du bassin
Volume du parallélépipède supérieur :
25 x 12,5 x 0,5 m³ = 156,25 m³
Volume du parallélépipède inférieur
15 x 12,50 x 1,3 m³ = 243,75 m³
Volume total : 156,25 m³ + 243,75 m³ = 400 m³
Quantité de produit à verser
0,05 litre x 400 = 20 litres de produit à verser

p. 15 n°9
Dimensions de la surface cultivable : carré de 13,6 m.
Aire du fossé : $14{,}5^2$ m² - $13{,}6^2$ m² = 210,25 m² - 184,96 m² = 25,29 m²
Volume de la terre enlevée : 25,29 x 0,6 m³ = 15,174 m³
Réponse : On a enlevé 15,174 m³ de terre et il reste 184,96 m² $\approx$ 1,85 ares à cultiver.

p. 15 n°10
Volume : 30 dm³ Aire de la base : 1 m² = 100 dm²
Hauteur d'eau : 30 : 100 = 0,3 dm ou 3 cm

p. 16 n°12
Aire de la base : 2,8 x 2,5 m² = 7 m²
Volume d'eau retirée :35 hl = 3500 l = 3,5 m³
Diminution de hauteur : 3,5 : 7 m = 0,5 m
Hauteur de l'eau qui reste : 1,65 m - 0,5 m = 1,15 m

p. 16 n°14
Aire de la base : $\frac{(42+28) \text{ x } 23}{2}$ m² = 805 m²
Volume de sable utilisé : 1386 : 15 = 92,4 m³
Epaisseur du sable : 92,4 : 805 = 0,1148 m $\approx$ 11,5 cm

p. 17 n°10
Aire de la couronne : π x $0{,}85^2$ - π x $0{,}6^2$ = 2,27 - 1,13 = 1,14 m²
Volume de la maçonnerie : 1,14 x 3,75 m³ = 4,24 m³
Prix de revient de la maçonnerie : 4,241 x 800 $\approx$ 3393 F
Volume de l'eau : π x $0{,}6^2$ x 1,5 m³ = 1,696 m³ = 16,

2. TRANSFORMATIONS DU PLAN ET DE L'ESPACE

2.1. INTRODUCTION ET EXEMPLES

2.1.1. Analyse d'activités types

Symétrie orthogonale au second degré (4ème année)

Exercices de construction de dessins symétriques par rapport à un axe vertical.
Notion et règles de construction progressivement découvertes par analyse d'erreurs.
Différence entre translation et symétrie orthogonale (glisser / retourner).
Découvertes de propriétés.

Exercices
1. Imaginer des introductions différentes de la notion (jeu de miroirs, projets…).
2. Imaginer une dizaine d'exercices et expliquer la gradation proposée.
3. Imaginer des prolongements à l'activité observée.
4. Lesquelles des propriétés suivantes sont conservées par la symétrie orthogonale :
   a) distances b) parallèles c) verticale

Symétrie orthogonale au troisième degré (6ème année)

Objectifs de la leçon clairement définis : utiliser les instruments avec précision, observer et découvrir les « règles du jeu », refaire, reconnaître, appliquer.
Notion de symétrie introduite par un pliage : on plie une feuille en deux, on perce des trous ; on ouvre ensuite la feuille et on observe.
Constatations : les « traces » ou segments de construction sont perpendiculaires à l'axe et parallèles entre elles ; un point et son image sont situés à même distance de l'axe.
Après d'autres exercices, plusieurs propriétés sont découvertes :

A : La figure et son image sont superposables par retournement
B : L'amplitude des angles est conservée
C : l'aire de la figure est conservée
D : La longueur d'un segment est conservée

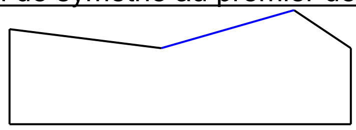
Type d'exercices proposés : constructions, erreurs à trouver, associer une image et son symétrique, vrai ou faux.
Exercices de synthèse : construire l'image, trouver l'axe, compléter un début de construction, replacer l'axe, compléter un dessin, inventer un dessin, trouver le nombre d'axes de symétrie.

Exercices
Rechercher les implications possibles avec les phrases A, B, C et D.
Illustrer par des contre-exemples les implications pas toujours vraies.

Quelques objectifs de ces types d'activité
- Construire des figures géométriques ayant ou non des éléments de symétrie en utilisant plusieurs procédés.
- Agir sur des formes géométriques et distinguer les actions qui impliquent un retournement de celles qui impliquent un simple glissement.
- Commencer à caractériser les figures présentant des éléments de symétrie.
- Commencer à analyser et à expliciter certaines propriétés qui se conservent dans une symétrie axiale.

Remarque
Il est important d'utiliser du papier uni, des axes autres que verticaux ou horizontaux pour éviter des généralisations hâtives. De plus, ce changement de position de l'axe permettra de passer à un niveau de compréhension plus élevé.

Exemples d'introduction de la notion de symétrie au premier degré (1ère – 2ème)

- Utilisation d'un gabarit
  On donne un gabarit
  
  On demande d'inventer un dessin en utilisant deux fois le gabarit, en contournant le gabarit et en découpant.
  Ensuite, on recherche le mouvement effectué pour passer d'une partie du dessin à l'autre.
  En prolongement, on distribue un dessin en demandant de chercher le mouvement effectué.
  On demande enfin aux enfants d'utiliser le gabarit et de le retourner pour la deuxième partie du dessin.

  L'utilisation d'un gabarit permettra de caractériser la symétrie par rapport aux autres isométries puisque le retournement est réellement effectué. Il est aussi intéressant d'utiliser du papier bicolore.

- Utilisation de pliages
  Plier un carré de papier en deux de façon à ce que les deux parties se superposent exactement. On observe ensuite les résultats.
  Réalisation de taches avant de plier; recherche du pli de la feuille du voisin ; même chose sur des photocopies (pas de trace de pliage).

  Les activités de pliage permettent la matérialisation d'axe(s) de symétrie et la mise en évidence du fait qu'une figure et de sa transformée dans une symétrie axiale se superposent après retournement.
  Néanmoins, les pliages ne suffisent pas pour introduire cette notion, un pliage n'étant pas une isométrie, et la symétrie axiale conservant les demi-plans.
  L'utilisation de papier bicolore permettent de mettre encore plus en évidence les propriétés de la symétrie.
  La réalisation de « ribambelles » et de « napperons » permettront d'aborder d'une autre manière la composition de symétries, et donc des rotations et des translations.

- Utilisation du miroir
  Observation, dessin de l'axe, dessin de l'image.

  L'utilisation d'un miroir met en évidence le changement d'orientation dans l'image ainsi que la position de l'axe de symétrie.
  Prolongement : construction de kaléidoscopes.

Projet "Miroirs et symétries"

Voir site www.jeuxmath.be

2.1.2. <u>Introduction</u>

<u>Exercice</u> : Décrire en le décomposant un mouvement de vissage, des mouvements d'objets divers.

Atelier
Dans le domaine des homothéties, des symétries et des rotations, trouver des exercices corporels, utilisant papier et crayon, utilisant du matériel divers, présentés sous forme de jeux, utilisant l'opérativité sur la transformation choisie.

Quelques idées pour les homothéties
- L'homothétie est vue comme une projection
- Objets utilisant la notion : photocopieuse, loupe, jumelles
- Dessin à agrandir sur un quadrillage (voir livres de jeux pour les enfants)
- Refaire une figure en plus grand à l'aide d'enfants, de bâtonnets, du géoplan
- Dessin et observation des invariants : voir ce qui se passe pour les longueurs, les aires, ce qui se passe si on change le centre de l'homothétie

Remarque : la notion d'échelle est difficile à expliquer (pourquoi transforme-t-on les distances et pas les angles ?, pourquoi multiplier toutes les distances ?…).
On peut partir d'une boîte à chaussure et demander eux enfants de la reconstruire en divisant les dimensions par 2 (permet de comparer les volumes).
On peut demander de dessiner un objet trop grand en donnant seulement une ficelle pour mesurer (on plie la ficelle pour pouvoir redessiner)

Quelques idées pour les symétries
- Introduction par taches et pliage, par découpages, ribambelles,…[1]
- Introduction par miroir ou jeu corporel de miroir (voir livre allemand)
- On peut proposer un dessin un axe de symétrie et demander si « on peut plier »
- Jeux : « Mirror game », « Reflection » (On a un miroir, deux pièces, et il faut essayer d'obtenir un dessin donné)

Remarque : La notion de symétrie apparaît dans des exercices d'école maternelle, parfois abusivement : l'enfant n'a pas besoin de maîtriser la notion pour compléter un lapin, un clown,… Selon la position de l'axe de symétrie, l'image d'une figure est plus difficile à déterminer, les quadrillages influençant le résultat.

Quelques idées pour les rotations
- Guider un objet ou un enfant dans un parcours, un labyrinthe
- Rondes diverses
- Faire tourner un enfant autour d'un objet : avec des ficelles de longueurs différentes, avec un élastique et observer les différents trajets ; faire une spirale en enroulant progressivement la ficelle.
- Donner des objets : toupie, gyroscope, objets ne tournant pas autour de leur centre, spirographe
- Montrer un dessin simple, le cacher, tourner la feuille et demander de dessiner.
  (Plusieurs stades : on tourne autour pour se replacer face à l'objet vu pareil, on tourne l'objet, on tourne autour de l'objet et on le dessine sous un autre angle)
- Montrer deux dessins et demander ce qu'on a pu faire pour passer de l'un à l'autre (penser au cas limite : on ne fait rien ou…, au cas impossible : autre moufle
- Utilisation de jeux informatiques : tétris, 3Dcubes ou block out, …

[1] Attention, le pliage de feuille de papier peut donner une vision erronée des symétries orthogonales : en effet, elle ne permute pas les deux demi-plans.

- Montrer un rectangle dont une longueur est rouge et une largeur bleue. Le cacher. Effectuer successivement des rotations dans l'espace et demander de le dessiner (mobilisation des images mentales)
- Jeu de six cartes numérotées de 1 à 6 en bleu d'un côté, en rouge de l'autre. Montrer des gestes et faire deviner la carte que l'on voit. (notion de temporalité)

Imaginer plusieurs introductions possibles à la notion d'échelle

Quelques idées
- face d'un objet à reproduire sur une feuille(outil : ficelle)
- dessin à reproduire en plus petit, en plus grand,
- plan de la classe à reproduire sur une feuille (pas forcément tous la même)
- distribution des pièces d'un puzzle : on sait que 8 cm deviennent 6 cm; demander à chaque équipe de reproduire une pièce du puzzle à l'échelle (vérification aisée)
- problèmes de carte

2.1.3. <u>Exercices de synthèse et analyse d'erreurs</u>

1. Faire un relevé des erreurs possibles lors de la construction de l'image d'une figure par une symétrie axiale.

2. Parmi ces phrases, préciser celles qui sont vraies et justifier :
   A : Un rectangle qui n'est pas un carré a exactement 4 axes de symétrie.
   B : Un triangle équilatéral a exactement trois axes de symétrie.
   C : Un triangle équilatéral a exactement un centre de symétrie.
   D : Un losange qui n'est pas un carré a exactement deux axes de symétrie.
   E : Un carré a exactement 4 axes de symétrie.
   F : Un parallélogramme qui n'est ni un losange ni un rectangle n'a pas d'axe de symétrie.
   G : Un parallélogramme n'a pas de centre de symétrie.
   H : Un cercle a un centre de symétrie.
   I : Un cercle a exactement deux axes de symétrie

3. Rechercher 6 figures admettant un centre de symétrie

4. Combien d'axes de symétrie possède un rectangle ?

5. Si un point m est équidistant des points e et f, alors :
   A : $|me| = |mf|$
   B : m est le milieu de [ef]
   C : Le triangle efm possède un axe de symétrie

6. Quels triangles admettent un et un seul axe de symétrie ?
   A : un triangle rectangle isocèle
   B : un triangle équilatéral
   C : un triangle isocèle et non équilatéral

7. Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est
   A : parfois sécante
   B : toujours parallèle
   C : parfois parallèle

8. Représenter, par exemple à l'aide d'un arbre ou d'un diagramme de Venn toutes les transformations du plan que vous connaissez.

<u>Formation personnelle</u>
Plusieurs logiciels simples permettent d'utiliser ces notions :
- *Paintbrush*
- CABRI géométrie

<u>Document</u> : les frises

2.2. NOTIONS THEORIQUES

Symétrie par rapport à une droite (ou symétrie axiale)

Lorsqu'on place un miroir perpendiculairement à un plan, un « double » des figures tracées apparaît dans le miroir : c et objet réalise une symétrie « axiale » de ces figures.

Intuitivement, deux figures sont symétriques par rapport à une droite D si elles se recouvrent exactement par un seul pliage le long de cette droite. La droite D est axe de symétrie
L'axe de symétrie est donc une droite qui partage une figure en deux parties égales et superposables exactement par pliage le long de cette droite.

<u>Définition</u> : Soit une droite D et un point p. Le point p' est l'image de p par la symétrie d'axe D ssi D est la médiatrice du segment [pp'].

<u>Vocabulaire</u> : Au lieu de symétrie « axiale », on dit souvent symétrie « orthogonale » pour rappeler que tout segment déterminé par un point et son image est « orthogonal » (càd ici perpendiculaire)à l'axe de symétrie.

<u>Remarques</u> :
Les jeux de miroirs utilisent en fait la notion de symétrie par rapport à un plan dans l'espace.
Lors d'une symétrie axiale dans un plan, l'orientation n'est pas conservée

Symétrie par rapport à un point (ou symétrie centrale)
Intuitivement, deux figures sont symétriques par rapport à un point o si elles se recouvrent exactement par un double pliage selon deux droites perpendiculaires, passant par le point o. Le point o est centre de symétrie. Cela correspond à une rotation d'un demi-tour.

<u>Définition</u> : Le symétrique d'un point m par rapport à un point o est
le point m' tel que o soit le milieu du segment [mm'], si m est distinct de o,
le point m lui-même, si m et o sont confondus.

Translation
Deux figures sont translatées l'une de l'autre si l'une est obtenue par glissement de l'autre dans une direction donnée, sans changement de taille ni d'orientation. les deux figures sont superposables.
La translation fait appel à un mouvement que l'on ne voit pas. On ne s'occupe en général que de la figure de départ et de sa transformée par translation.

Translater un objet, c'est le déplacer en conservant toutes ses directions. La formulation mathématique de cette transformation oblige à définir de nouveaux objets : les vecteurs.

<u>Définition</u> : Soit un vecteur $\overrightarrow{ab}$ (segment [ab] orienté de a vers b). La translation de vecteur $\overrightarrow{ab}$ fait correspondre à tout point p un point p' tel que :

pp' // ab, |pp'| = |ab|, sens de $\overrightarrow{pp'}$ = sens de $\overrightarrow{ab}$.

Rotation

Elle associe à toute figure son image obtenue par rotation autour d'un point fixe o (centre de la rotation) d'un angle α donné.
Chaque point-image p' est obtenu par déplacement du point p sur un cercle de centre o et de rayon |op|, suivant un angle α.
La figure de départ et son image par rotation sont superposables.
La rotation fait également appel à un mouvement que l'on ne voit pas. On ne s'intéresse en général qu'à la figure de départ et à son image obtenue par la rotation.

Homothétie

Cette transformation n'est pas une isométrie, c'est-à-dire qu'elle ne conserve en général pas les longueurs.
Une homothétie est une transformation du plan qui permet d'agrandir ou de réduire une figure donnée.
Elle est caractérisée par un point fixe o appelé centre et un nombre r appelé rapport.
Elle multiplie les longueurs de la figure par la valeur absolue du rapport.

Orientation

L'orientation sert à distinguer déplacement et retournement.
Cette notion sera utilisée dans le plan puis dans l'espace.
Introduction : miroirs, dessins sur transparents, recherche sur des figures conservées par déplacement et retournement…

<u>Orientation et symétrie</u>

Espace considéré	Symétrie par rapport à un(e)	Orientation
Droite	point	inversée
Plan	droite	inversée
	point	conservée
Espace	plan	inversée
	droite	conservée
	point	inversée

Applications

Activités de pliage, reconnaissance de figures symétriques, recherche de figures ou objets symétriques, coloriage symétrique,...
Jeux utilisant les miroirs.
Réalisation de fresque, de vitraux, de papier cadeau, de ribambelles, suites logiques, alternances cycliques pour réaliser une fleur,...
Activités de psychomotricité utilisant les rotations, les symétries par rapport à un plan (miroir),...
Dessin à agrandir ou réduire.

Définir quelques solides à partir des transformations qui les conservent (automorphismes)

2.3. TRANSFORMATIONS ABORDEES A L'ECOLE PRIMAIRE

a) Les socles de compétences

Plusieurs compétences transversales peuvent être développées à l'aide des transformations géométriques :

- Résoudre, raisonner, argumenter (action sur des matériels divers, recherche d'exemples et de contre-exemples, utilisation d'un langage précis)
- Appliquer et généraliser (évoquer des connaissances en relation avec la situation, créer des liens, reconnaître des situations comme semblables ou dissemblables, se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes, se poser des questions pour étendre une propriété, une règle à un domaine plus large)
- Structurer et synthétiser.

En géométrie, les transformations sont reprises plusieurs fois dans la partie " Dégager des régularités, des propriétés, argumenter."

	I	II	III
Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités.	↗	C :Reconnaître la présence d'un axe de symétrie.	C :Reconnaître et caractériser une translation, une symétrie axiale et une rotation .
Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de figures, de transformations.		↗	C
Reconnaître et construire des agrandissements et des réductions de figures.	↗	C :En s'appuyant sur des quadrillages.	C :En s'appuyant sur les propriétés de proportionnalité et de parallélisme.
Relever des régularités dans des familles de figures planes et en tirer des propriétés relatives aux angles, aux distances et aux droites remarquables.			C
Décrire l'effet d'une transformation sur les coordonnées d'une figure.			C
Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.	↗	C :Pour décrire, comparer, tracer.	C :Pour énoncer et argumenter.

D'autre part, l'accent sera mis au début du secondaire non seulement sur la construction de l'image d'une figure par une transformation, mais aussi sur les propriétés des différentes transformations et leur utilisation, sur la recherche d'éléments de symétrie.

b) <u>Les transformations de la première à la sixième année dans l'enseignement primaire</u>
Ce document, réalisé en 1995 par Michel Demal (Mons) reprend des idées d'activités à l'école primaire. Voici la progression proposée :

1. Activités en première et deuxième année

En première et deuxième, les enfants découvrent :
- *que l'isométrie de deux figures riches (animaux, avions,…) se démontre en les superposant à l'aide d'un transparent.*
- *que deux figures isométriques sont superposables soit uniquement par déplacement, soit uniquement par retournement, soit par déplacement et par retournement.*
- des définitions intuitives de déplacements et de retournements de figures planes telles que :
  "Deux figures sont superposables par déplacement si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre sans quitter le plan."
  "Deux figures planes sont superposables par retournement si, pour passer de l'une à l'autre, on doit quitter le plan et "retourner" la figure".
- que lors de transformations, la forme, la longueur d'un segment, l'écartement d'un angle… peuvent éventuellement varier.
- que l'égalité de l'écartement d'angles se justifie en superposant par déplacement ou par retournement d'un angle dessiné sur transparent.
- que l'égalité de la longueur des côtés se justifie en utilisant soit une latte, soit en superposant un segment dessiné sur transparent.
- que le parallélisme de côtés dans les figures est vérifié en superposant sur ceux-ci des paires de droites parallèles dessinées sur transparents.
- *que l'isométrie de côtés ou d'angles de solides se réalise en utilisant des déplacements de l'espace.*

De plus, la reproduction de dessins, l'agrandissement ou la réduction de figures, la réalisation de frises familiarisent les enfants aux notions de translations, de symétries orthogonales, de rotations, d'homothéties, de similitudes ainsi qu'avec la notion d'axes de symétrie de figures.

Remarque : à ce niveau, toute l'information se fait oralement et tout concept rencontré est au préalable matérialisé et manipulé par les enfants.

2. Activités en troisième année

Outre les notions théoriques déjà rencontrées au premier degré, la troisième année se distingue par l'apport des notions suivantes :
- l'utilisation de figures "pauvres" (figures géométriques) au détriment des figures "riches".
- *la familiarisation informelle aux notions d'axe et non-axe de symétrie, de centre de rotation, de figure superposable à elle-même par déplacement et/ou par retournement, de figures superposables par rotations, translations, similitudes, retournements différents des symétries orthogonales.*
- l'approche écrite des définitions de figures superposables par déplacement et/ou retournements.
- la définition du milieu d'un segment à partir de la notion de "demi-segments" superposables.
- l'emploi des automorphismes[1], exprimés uniquement en termes de déplacement et de retournement, pour justifier l'égalité des amplitudes des angles et l'égalité des longueurs des côtés dans les quadrilatères et les triangles.

De plus, la reproduction de dessins, l'agrandissement ou la réduction de figures, la réalisation de frises permettent de continuer à familiariser les enfants avec les transformations particulières (translations, symétries orthogonales, rotations, symétries glissées - homothéties, similitudes) ainsi qu'avec la notion d'axe de symétrie de figures

3. Activités en quatrième année

Capitalisant sur les notions théoriques rencontrées durant les trois premières années, la quatrième propose les concepts supplémentaires suivants :
- *l'inversion progressive entre la phase matérialisée et la phase mentale*
- l'emploi de "deux demi-segments" dessinés sur un transparent pour justifier, par déplacement, que deux segments se coupent en leur milieu.
- *l'utilisation de dessins de mains dans la recherche des figures superposables par déplacements et/ou retournements.*
- l'introduction et le recours à l'orientation du plan et au sens de rotation horlogique et anti-horlogique.

[1] automorphisme : transformation appliquant un objet sur lui-même

- la distinction entre déplacement et retournement par le biais de l'orientation et/ou du dessin de mains.
- *le dessin sur quadrillage d'images de figures par un déplacement ou un retournement de leur choix.*
- l'identification des symétries orthogonales aux retournements qui admettent une droite de points fixes.
- l'estimation de l'image de points, de figures (droites - segments - polygones usuels,…) et de demi-plans par des symétries orthogonales
- l'utilisation de la règle de construction de l'image d'un point pour dessiner l'image de figures (droites - segments - polygones usuels - paysages) par des symétries orthogonales.
- *la découverte de figures superposables à elles-mêmes par symétrie orthogonale. La découverte orale de la notion d'axe de symétrie de figures sans utiliser le pliage, qui n'est pas une matérialisation d'une symétrie orthogonale*.
- l'identification de rotations aux déplacements qui admettent un point fixe ou tous les points fixes.
- la détermination des rotations par leur centre, leur sens de rotation et l'amplitude de l'angle de rotation.
- l'estimation des images de points, de figures (droites - segments - polygones usuels - paysages) par des rotations.
- le recours à la règle de construction de l'image d'un point pour dessiner l'image de figures par des rotations.
- *l'emploi des automorphismes, exprimés en termes de déplacements et de retournements, pour justifier oralement les propriétés des diagonales et des médianes des quadrilatères.*
- la caractérisation (orale), en terme de symétries orthogonales ou de rotations, des automorphismes des quadrilatères et des triangles après manipulation de transparents.

De plus, la reproduction de dessins, l'agrandissement ou la réduction de figures, la réalisation de frises sont l'occasion de faire intégrer par les enfants les transformations particulières ainsi que la notion d'axe de symétrie.

4. <u>Activités au dernier cycle du primaire</u>

Poursuivant dans la voie de l'enseignement en spirale, c'est-à-dire utilisant les concepts développés pendant les quatre premières années, le troisième degré se distingue par les concepts supplémentaires suivants :

- *la détermination du type d'isométrie, en termes de déplacement et de retournement, qui applique une figure sur son image réalisée d'abord mentalement et vérifiée ensuite par manipulation.*
- le repérage, sans modèle, de couples de figures isométriques superposables par déplacement et par retournement (certaines figures admettent un axe de symétrie vertical et/ou un axe horizontal et/ou oblique
- le dessin sur quadrillage (sur feuille unie en sixième) d'images de figures par un déplacement ou un retournement réalisé en partant de la donnée de l'image d'un point ou d'une partie de la figure.
- *l'imagination et le dessin de figures superposables par déplacement et par retournement sur quadrillage (sur feuille unie en sixième).*
- la détermination d'invariants de transformations autres que les isométries du plan.
- *la recherche d'invariants associés aux déplacements du plan et aux retournements du plan y compris l'orientation du plan et le dessin de mains.*
- l'utilisation des invariants des déplacements du plan et des retournements du plan (non caractérisés en termes de translations, de symétries orthogonales, de rotations, de symétries glissées) pour réaliser des démonstrations orales et collectives.
- *la caractérisation (écrite) des automorphismes en termes de symétries orthogonales ou de rotations des cercles, des quadrilatères, des triangles et des polygones réguliers après manipulation de transparents.*
- *la détermination du nombre d'axes de symétrie et/ou de l'ordre et du centre de rotations des figures usuelles.*
- l'identification du déplacement identique au déplacement qui admet tous les points fixes du plan.
- la détermination de l'image d'une droite (segment) par les rotations de 90°, 180°, 270°, 360°.
- l'expression écrite de la définition d'axe de symétrie d'une figure.
- l'introduction du symbolisme mathématique associé aux transformations.
- la détermination de l'image par un déplacement ou par un retournement des côtés d'un angle.
- *la détermination du type de transformation conservant une frise donnée.*
- la recherche des composées de retournements et/ou de déplacements du plan.
- l'utilisation de déplacements de l'espace pour découvrir des faces isométriques sur des solides.
- l'identification des translations aux déplacements n'admettant pas de point fixe.
- la découverte des symétries centrales dans l'espace et dans le plan.
- la détermination de l'image de figures (mains) par des translations et des symétries centrales de l'espace et du plan.
- l'identification du miroir à la symétrie bilatérale.
- l'identification des symétries centrales planes aux rotations de 180°.

- l'identification des rotations de l'espace aux déplacements admettant une droite de points fixes.
- *la détermination des plans de symétrie, des axes de rotation des solides usuels.*
- *la construction de l'image de solides par une symétrie bilatérale, une rotation ou une translation de l'espace.*
- la recherche, par la méthode géométrique, de l'image d'une figure par une homothétie de rapport positif.
- la découverte des règles "tout bouge" et "position initiale - position finale" pour les transformations usuelles.
- *le repérage, parmi les figures agrandies ou réduites, de celles dont toutes les dimensions sont agrandies ou réduites dans la même proportion.*

2.3.1. Complément : quelques références

- CERQUETTI-ABERKANE Françoise, Enseigner les mathématiques à l'école, Hachette, Paris, 1992.
- CHAMBADAL Lucien, Calcul pratique Arithmétique et géométrie, Hachette, Paris, 1983
- CHARNAY Roland et MANTE Michel, Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles (tome 2), Hatier, Paris, 1996.
- DELEDICQ A., *Mathématiques Collège*, Editions de la Cité, Paris, 1998
- FENICHEL M. et PAUVERT M., *L'épreuve de Mathématiques au concours de professeur des écoles*, A. Colin, Paris, 1997
- KUZNIAK A. et TAVEAU C., Travaux géométriques 6^{e}, Nathan Pédagogie, Paris, 1998.
- ROEGIERS Xavier, Guide mathématique de base 2, De Boeck, Bruxelles, 1993.
  SCHONS N.-J., Eléments d'arithmétique, La Procure, Namur, 1963.

Ce cours contient également de nombreuses idées de collègues.