

Projet « Dosages et proportions »

Table des matières

1. Introduction au projet.....	1
2. Introduction de l'activité.....	2
3. Regards mathématiques sur la pyramide alimentaire.....	2
4. Volume d'une pyramide.....	3
5. Représentation correcte d'un régime alimentaire idéal.....	5
6. Activités en ateliers.....	5
7. Liens mathématiques.....	5
8. Solutions des défis.....	6

1. Introduction au projet

Les proportions et utilisations de la règle de trois posent souvent des problèmes, que ce soit en cuisine, pour se nourrir, ou encore pour se soigner.

Nous avons voulu ici partir d'un regard critique sur les informations qui nous sont données, en les analysant et en les corrigeant. Notre réflexion nous amènera à en connaître plus sur le volume d'une pyramide. Nous utiliserons ensuite les proportions dans un contexte créatif de construction de représentations mathématiques.

Enfin, différents défis permettront de travailler les proportions dans divers contextes et à différents niveaux.

Bon amusement !

Objectifs pédagogiques :

« Donner du sens aux grandeurs et aux mesures de celles-ci en les utilisant dans des activités concrètes. Procéder à des estimations et des mesures de grandeurs dans des contextes variés et ludiques. Utiliser la proportionnalité directe dans diverses situations. »

Compétences travaillées :

Compétences transversales :

- *Se poser des questions*
- *Estimer un résultat, vérifier sa plausibilité*
- *Créer des liens entre des faits ou des situations*
- *Utiliser un schéma, un dessin, un tableau, un graphique lorsque ces supports sont pertinents*
- *Morceler un problème, transposer un énoncé en une suite d'opérations*

Compétences disciplinaires :

- *Construire et utiliser des démarches pour calculer des aires et des volumes.*
- *Calculer des pourcentages*
- *Déterminer le rapport entre deux grandeurs*
- *Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe*
- *Connaître le sens des préfixes déca, déci, hecto, kilo, centi, milli, ...*

Compétences disciplinaires géométriques abordées dans l'activité :

- Construire des solides simples avec du matériel varié
- Reconnaître, comparer des solides, les différencier et les classer

Lien vers les documents du projet : <http://www.jeuxmath.be/ressource/projet-dosages-et-proportions/>

2. Introduction de l'activité

Objectifs : Avoir un regard critique sur les informations reçues ; pouvoir repérer des erreurs simples de proportions.

Déroulement :

- Fichier Powerpoint du site avec dans un premier temps des erreurs variées.
- Analyse des erreurs en collectif avec les élèves.
- Analyse de l'erreur de proportion sur le cube avec retour éventuel sur le volume d'un cube, d'un parallélépipède rectangle.
- Premières caractéristiques de la pyramide alimentaire : questions aux élèves
- Relevé oral des propositions des élèves

Prérequis : volume d'un parallélépipède rectangle : si nécessaire

Activité collective, reprise plus tard en petits groupes si nécessaire:

Matériel : boîte classique et cubes unités.

Consigne :

Trouver le plus rapidement possible le nombre de cubes qu'il y a dans la boîte.

Déroulement :

- aucune indication
- synthèse en faisant apparaître les différentes démarches utilisées et en distinguant celle qui est plus rapide (Aide la base x hauteur).
- application : volume du cube

3. Regards mathématiques sur la pyramide alimentaire

Objectifs : Se poser des questions ; Développer la curiosité mathématique et l'esprit critique.

« Quelles informations sur la pyramide alimentaire trouve-t-on sur Internet ? »

Début de réponse à l'aide d'un fichier Powerpoint du site reprenant diverses représentations¹.

Exemples de commentaires sur les diverses représentations :

- certaines proposent des triangles,
- on voit parfois apparaître sport et activité physique,
- on ne met pas toujours les boissons,
- les proportions ne sont souvent pas indiquées clairement,
- les pourcentages ne sont pas indiqués, où ne sont pas représentés correctement,
- les proportions peuvent changer selon les individus.

¹ Aide de Michael, 1 N Pri HA

4. Volume d'une pyramide

Objectif : A l'aide de la formule de calcul du volume d'un parallélépipède rectangle et du cube, trouver celui d'une pyramide et pouvoir l'expliquer.

Compétence : "Construire et utiliser des démarches pour calculer des volumes."

Lien entre volume d'une pyramide et volume d'un cube

Objectif supplémentaire : Repérer par la manipulation les liens entre des solides (ici les pyramides proposées et le cube de référence).

Consigne :

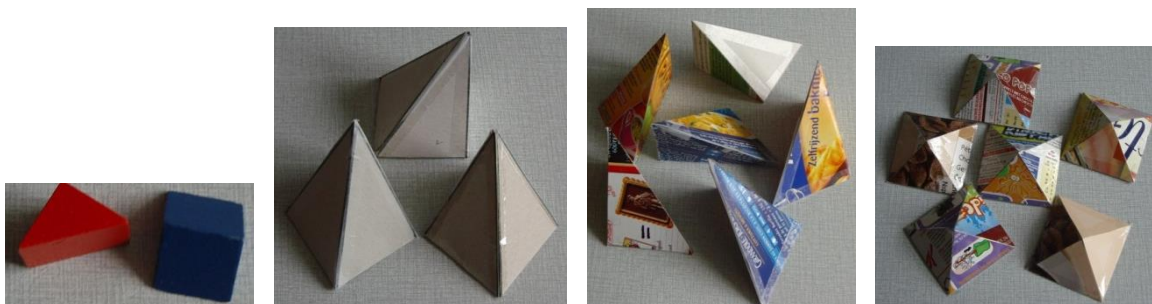
Avec les pièces proposées, construire des pyramides ou des cubes.

A partir de ces puzzles, trouver comment calculer le volume d'une pyramide.

Matériel : (un jeu complet par table)

- prismes à base triangulaires (demi - cubes)
- "demi pyramides"
- pyramides obliques à base carrée (tiers de cube)
- pyramides obliques à base triangulaire (sixièmes de cube)
- pyramides régulières à base carrée (sixièmes de cube)

Photos du matériel



Consigne supplémentaire si nécessaire :

A partir du cube et de son découpage en plusieurs pyramides, trouver le lien entre le volume de chaque type de pyramide et le volume du cube puis le justifier.

Déroulement :

- a. aucune indication
- b. synthèse quand un des groupes a tout trouvé : faire justifier le nom des solides
- c. synthèse des différents résultats trouvés.
- d. comparaison entre différents résultats (comparaison des bases, des hauteurs)
- e. dégagement de la règle : le volume d'une pyramide vaut le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.



Observations :

- Le volume d'une pyramide (oblique) à base carrée et de hauteur égale au côté du carré vaut le tiers du volume du cube correspondant.
- Le volume d'une pyramide (droite) à base carrée et de hauteur égale à la moitié du côté du carré vaut le sixième du volume du cube correspondant.
- Le volume d'une pyramide (oblique) dont la base est un "demi carré" et de hauteur égale au côté du carré vaut le sixième du volume du cube correspondant.

Généralisation : le volume d'une pyramide vaut le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur.

Défi 2 bis :

A quels pourcentages réels correspond le schéma de la pyramide proposée, en ne reprenant pas l'étage inférieur.

Correction : voir annexe

Les pourcentages ou rapports proposés ne correspondent pas du tout aux rapports des volumes de la pyramide représentée.

Conséquence : il faudrait trouver une autre représentation des données chiffrées ou rapport.

Défi 2 ter :

Quelle serait la pyramide alimentaire qui traduirait exactement les informations données par la banque alimentaire ?

Correction : voir annexe

On obtiendrait une pyramide très différente de celle proposée avec les données réelles.

5. Représentation correcte d'un régime alimentaire idéal

Défi 3 :

Représenter correctement les pourcentages des familles d'aliments sur une figure géométrique à choisir (disque, triangle, carré, rectangle non carré)

Correction pour le disque en annexe.

6. Activités en ateliers

Les défis proposés aux élèves dépendront du temps disponible et de leur intérêt. Voir défis 4 et suivants.

Correction en annexe

Le défi 7 nécessite un matériel spécifique et n'est pas repris ici.

7. Liens mathématiques

Longueurs :

Exercices progressifs mesures de longueur : <http://www.lnstit.com/exercice-mathematiques-mesures-longueurs-mesurer-segments.html&serno=1&mc=1>

Conversions de longueurs : test en ligne : <http://www.jeuxmaths.fr/exercice-de-math-conversion-longueur.html>

Problème en vidéo : Longueurs :

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU3-1.mp4.mp4 ;

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU4-special-noel.mp4.mp4

Aires

Problèmes en vidéo : aires :

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU4.mp4.mp4 ;

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU4-6e-aireperimetre.mp4.mp4

Capacités

Exercices progressifs capacités : <http://www.lnstit.com/exercice-mathematiques-mesures-capacites-conversion-tableau.html&serno=1&mc=1>

Problème en vidéo : Capacités :

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU5.mp4.mp4

Masses

Exercices progressifs masses : <http://www.lnstit.com/exercice-mathematiques-mesures-masses-balance-peser.html&serno=1>

Problème en vidéo :

Pourcentages et proportions

Exercices progressifs sur la proportionnalité : <http://www.lnstit.com/exercice-mathematiques-proportionnalite-problemes.html&serno=1>

Exercices progressifs sur les pourcentages : <http://www.linstit.com/exercice-mathematiques-proportionnalite-pourcentages-trouver.html&serno=1> (choisir en haut à droite la série)

Problème en vidéo : Pourcentages :

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU3.mp4.mp4 ;

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU3-3b.mp4.mp4 ;

Proportions : http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU2-9.mp4.mp4 :

http://mathix.org/video/problemes_ouverts/PB_DUDU/PBDUDU4-6e-proportionnalite.mp4.mp4 (cuisine) ;

Angles

Mesure d'angles : estimations : <http://www.jeuxmaths.fr/jeu-de-math-lebonangle.html>

Divers

Estimations : Compas dans l'œil : <http://woodgears.ca/eyeball/>

8. Solutions des défis

Défi 1 :

On peut placer 4 cubes roses le long d'une arête du cube vert.

Il y en a 16 sur une face, et donc 64 pour le cube total.

Il faudrait donc remplacer 25% par $1/64 = 0,015625 \approx 1,56 \%$

Défi 2 :

Volume d'une pyramide en général : $\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$

Dans le cas de la pyramide à base carrée inscrite dans un cube, ceci donne $1/3$ du volume du cube.

Défi 2 bis

1°) Calculer le volume des couches d'une pyramide à base carrée dont la base mesure 6 cm de côté et la hauteur mesure 6 cm. la pyramide est découpée en 6 couches horizontales.

Hauteur de la pyramide en cm	Base de la pyramide en cm	Volume de la pyramide en cm ³	Volume de la couche correspondante en cm ³	Remarques
1	1	$1/3 = 0,33..$	0,33...	
2	2	$8/3 = 2,66..$	2,33...	On ôte le volume de la pyramide du dessus
3	3	$27/3 = 9$	6,33...	
4	4	$64/3 = 21,33..$	12,33...	
5	5	$125/3 = 41,66..$	20,33...	
6	6	$216/3 = 72$	30,33...	

2°) A quel pourcentage du total correspond chaque couche ?

Le volume total de la pyramide vaut 72 cm³

Couche 1 (dessus) : $0,33... : 72 \approx 0,0046 \approx 0,46 \%$

Couche 2 : $2,33... : 72 \approx 0,0324 \approx 3,24 \%$

Couche 3 : $6,33... : 72 \approx 0,0880 \approx \mathbf{8,8\%}$
 Couche 4 : $12,33... : 72 \approx 0,1713 \approx \mathbf{17,13\%}$
 Couche 5 : $20,33... : 72 \approx 0,2824 \approx \mathbf{28,24\%}$
 Couche 6 : $91,333 : 72 \approx 0,4213 \approx \mathbf{42,13\%}$

Vérification : $0,46 + 3,24 + 8,8 + 17,13 + 28,24 + 42,13 = 100$

Conclusion : Les pourcentages ou rapports proposés ne correspondent pas du tout aux rapports des volumes de la pyramide représentée.

Défi 2 ter

Pyramide alimentaire obtenue à l'aide des données de la pyramide proposée :
 Nombres proposés pour les rubriques (en %) : 2,5 ; 2,5 ; 12 ; 25 ; 25 et 33.

L'idée est de partir d'une pyramide à base carrée de 100 cm^3 et des volumes de chaque couche qui sont les différents pourcentages.

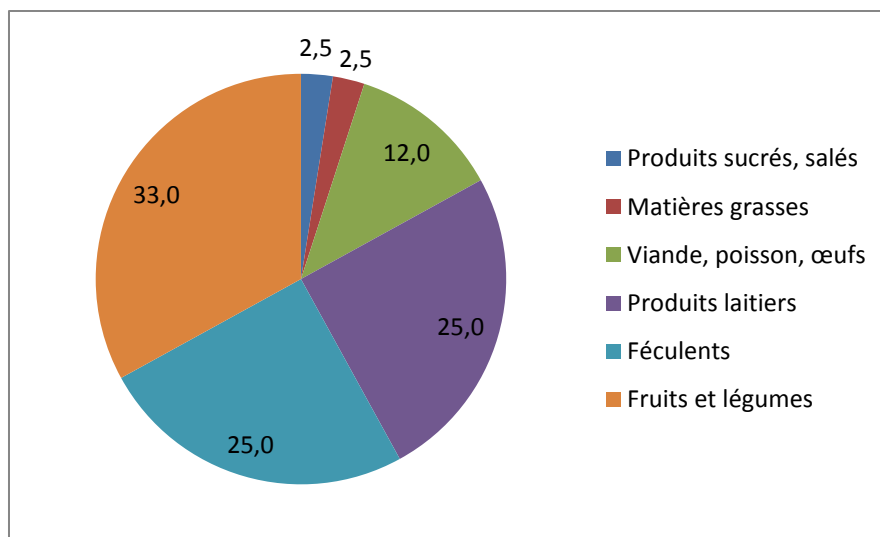
On calcule ensuite la dimension de la base, la hauteur totale à cette étape et la hauteur de la couche.

Ceci donne :

Hauteur totale de la pyramide en cm	Base de la pyramide en cm	Volume de la pyramide en cm^3	Volume de la couche correspondante en cm^3	Hauteur de la couche en cm
1,4	1,4	2,5	2,5	1,4
1,7	1,7	5,0	2,5	0,3
2,6	2,6	17,0	12,0	0,9
3,5	3,5	42,0	25,0	0,9
4,1	4,1	67,0	25,0	0,6
4,6	4,6	100,0	33,0	0,5

Défi 3

Pour le disque, ceci donne avec Excel :



Défi 4**Compétences disciplinaires :**

- 3.3.1.7. Connaître le sens des préfixes : déca, déci, hecto, kilo, centi, milli.
- 3.3.2.5. Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.
- 3.3.2.8. Déterminer le rapport entre deux grandeurs.

Compétences transversales :

- 2.2.8. S'exprimer dans un langage clair et précis.
- 2.2.6. Morceler un problème, transposer un énoncé en une suite d'opérations.

Objectifs :

- L'élève sera capable de transformer les proportions d'une recette d'un gâteau pour un nombre de personnes donné.
- L'élève sera capable de calculer l'aire d'un parallépipède rectangle.

Réponse à l'étape 1 :

Pour 4 personnes	Pour 12 personnes
200 g de carottes	600 g de carottes
50 g de noisettes moulues	150 g de noisettes moulues
125 g de cassonade	375 g de cassonade
90 g de farine	270 g de farine
2 œufs	6 œufs
7,5g de levure	22,5 g de levure
6,25cl d'huile	18,75cl d'huile
4 cl de lait	12 cl de lait
4 g de sucre de canne	12 g de sucre de canne

Conversion en kilogrammes et en litres pour 12 personnes :

0,6 kg de carottes
 0,15 kg de noisettes moulues
 0,375 kg de cassonade
 0,270 kg de farine
 6 œufs
 0,0225 kg de levure
 0,1875 l d'huile
 0,12 l de lait
 0,012 kg de sucre de canne

Réponse à l'étape 2 :

Formule pour calculer l'aire latérale du parallépipède rectangle : $[(2xL)+(2xl)] \times h$

Formule pour l'aire de la base du parallépipède rectangle : (Lxl)

On additionne donc les deux formules pour trouver l'aire de la surface totale à décorer:

$(Lxl) + [(2xl) + (2xl)] \times h$

$(23 \times 14) + [(2 \times 23) + (2 \times 14)] \times 7 = 322 + (46 + 28) \times 7 = 322 + (74 \times 7) = 322 + 518 = 840 \text{ cm}^2$

Défi 5**Prérequis :**

- Les mesures de capacité
- Règle de trois

Objectifs :

- Découvrir des méthodes appropriées à la résolution de problèmes dont la structure correspond à celle des grandeurs proportionnelles.
- Réaliser des problèmes arithmétiques portant sur les mesures de capacité.

Compétences disciplinaires :

- Connaître le sens des préfixes déca., déci., hecto., kilo., centi., milli.
- Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.
- Dans une situation de proportionnalité directe, compléter, construire, exploiter un tableau qui met en relation des grandeurs.
- Déterminer le rapport entre deux grandeurs.
- Etablir des relations dans un système pour donner du sens à la lecture et à l'écriture d'une mesure.

Compétences transversales :

- Sélectionner les informations utiles.
- S'exprimer dans un langage clair et précis.
- Morceler un problème, transposer un énoncé en une suite d'opérations.(vérifier)

Etape 1

1 kg de fraises → 750 g de confiture
5 kg de fraises → ?

Résolution :

Fraises (en kg)	Confiture (en grammes)
1	750
x5	x5
5	3750

1 kg de fraises permet de faire 750 g de confiture. Et pour avoir 5 kg de fraises, on doit multiplier 1 kg par 5 et, conséquemment, on doit aussi multiplier les 750 g de confiture par 5. Ce qui nous donne 3750 g de confiture pour 5 kg de fraises.

Remarque :

Une grandeur est proportionnelle à une autre si l'on obtient les valeurs de la deuxième grandeur en multipliant les valeurs de la première grandeur par le même nombre.

Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

On obtient les valeurs de la deuxième grandeur en multipliant les valeurs de la première grandeur par 5.

Donc les deux grandeurs sont proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité est **5**.

Réponse : Avec 5 kg de fraises, on peut faire 3750 g de confiture.

Etape 2

1 tarte → 6 personnes

? → 24 personnes

Résolution :

Tartes	Personnes
1	6
x4	x4
4	24

Pâte feuilletée

1 tarte	4 tartes
500 g de farine	2000 g = 2 kg de farine
250 ml d'eau	1000 ml = 1 l d'eau
10 g de sel	40 g de sel
375 g de beurre	1500 g = 1,5 kg de beurre

Crème pâtissière

1 tarte	4 tartes
½ l de lait	2 l de lait
3 jaunes d'œufs	12 jaunes d'œufs
100 g de sucre	400 g de sucre
50 g de farine	200 g de farine
50 g de beurre	200 g de beurre

Remarque :

On obtient les valeurs de la deuxième grandeur en multipliant les valeurs de la première grandeur par 4.

Le coefficient de proportionnalité est **4**.

Réponse : On doit préparer 4 tartes.

Etape 3Résolution :

	Tartes	Personnes	
	1	6	
x20	4	24	x20
	20	120	

Remarque :

On obtient les valeurs de la deuxième grandeur en multipliant les valeurs de la première grandeur par 20.

Le coefficient de proportionnalité est **20**.

Réponse : Pour 120 personnes, on doit préparer 20 tartes.

Etape 4Données :

- 3750 g de confiture produite
- 250 g de confiture par tarte
- 4 tartes préparées

Résolution :

$$(1) 250 \text{ g} \times 4 = 1000 \text{ g}$$

Alors, 3750 g de confiture produite moins 1 kg utilisé pour garnir les tartes, donne 2750 g.
 $2750 : 250 = 11$ pots

Réponse :

- (1) Après la préparation des 4 tartes, il nous reste 2750 g de confiture.
- (2) On a besoin de 11 pots de 250 g pour garder la confiture qui reste.

Défi 6Objectifs

Travailler la proportionnalité à partir d'un exemple de la vie quotidienne.

Savoir résoudre des problèmes.

Appliquer les propriétés de la proportionnalité.

Formuler des hypothèses et les vérifier.

Compétences

3.2.2 : Opérer / fractionner - Résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe.

Au niveau des compétences transversales :

1. Analyser et comprendre un message :
 - repérer, reformuler la ou les question(s) explicites(s), implicite(s)
 - se poser des questions
 - distinguer, sélectionner les informations utiles des autres ; percevoir l'absence d'une donnée nécessaire et la formuler
2. Résoudre, raisonner et argumenter :

- raccrocher la situation à des objets mathématiques connus
- estimer le résultat, vérifier sa plausibilité
- exposer et comparer ses arguments, ses méthodes : confronter ses résultats à ceux des autres
- morceler un problème, transposer un énoncé en une suite d'opérations

Au niveau des compétences relatives aux outils mathématiques de base :

Dans le domaine des grandeurs :

1. Comparer, mesurer :

- connaître les sens des préfixes déca., déci., hecto., kilo., centi., milli.

2. Opérer, fractionner :

- calculer des pourcentages
- résoudre des problèmes simples de proportionnalité directe

Corrigé du défi

Données

Pour préparer 40 truffes, il faut 300 g de chocolat, 50 g de cacao, 3 jaunes d'œufs, 125 g de crème fraîche, 50 g de beurre, 70 g de sucre glace.

Une plaque de chocolat pèse 200 g / un paquet de cacao pèse 1kg / une barquette de beurre pèse 250g / un berlingot de crème fraîche a pour capacité 250 g

La classe de 6^{ème} A compte 18 élèves. La classe de 6^{ème} B compte 24 élèves et la classe de 6^{ème} C, 22 élèves.

Pour financer l'excursion, chaque enfant doit préparer 25 truffes

Résolution

Pour financer l'excursion, il faudra préparer

25 truffes x le nombre d'élèves (64 élèves de 6^{ème}) = 1600 truffes.

Pour préparer 40 truffes, il faut 300 g de chocolat, 50 g de cacao, 3 jaunes d'œufs, 125 g de crème fraîche, 50 g de beurre, 70 g de sucre glace.

a/ Liste de courses

Pour préparer 1600 truffes, il faut :

1600 truffes, c'est 40 x 40 truffes de chocolat

300 g de chocolat x 40 = 12000 g de chocolat (12 kg). Une plaque de chocolat pèse 200 g.

On a donc besoin de 60 plaques de chocolat

50 g de cacao x 40 = 2000 g de cacao (2 kg), soit 2 paquets de cacao

50 g de beurre x 40 = 2000 g de beurre. Une barquette de beurre = 250 g. Il faut donc 8 barquettes de beurre

120 jaunes d'œufs

125 g de crème fraîche x 40 = 5 kg de crème fraîche.

Un berlingot de crème fraîche correspond à 125 g. Il faut donc 20 berlingots de crème fraîche.

70 g de sucre glace x 40 = 2800 g = 2,8 kg de de sucre glace

b/ Partage des ingrédients entre les classes

Classe A : 18 élèves

Pour partager les ingrédients, il faut diviser les quantités totales par 64 (nombre d'élèves des trois classes) et multiplier ces nombres par le nombre d'élèves de chaque classe.

12000 g : 64 = 187,5 g

187,5 x 18 = **3375 g de chocolat**

2000 g : 64 = 31,25 g

31,25 x 18 = **562,5 g de beurre / cacao**

120 : 64 = 1,875

1,875 x 18 = 33,75. D'où **34 œufs**

5000 : 64 = 625 g de crème fraîche
2800 : 64 = 43,75 g de sucre

625 x 18 = **1406,25 g** de crème fraîche.
43,75 x 18 = **787,5 g** de sucre glace.

Pour la classe B, ils sont 24.

187,5 x 24 = **4500 g de chocolat**
31,25 x 24 = **750 g de beurre / cacao**
1,875 x 24 = 45. D'où **45 œufs**
625 x 24 = **1875 g** de crème fraîche.
43,75 x 24 = **1050 g** de sucre glace.

Pour la classe C, ils sont 22. Il suffit de multiplier les résultats précédents par 4/3.

187,5 x 22 = **4125 g de chocolat**
31,25 x 22 = **687,5 g de beurre / cacao**
1,875 x 22 = 41,25. D'où **41 œufs**
625 x 22 = **1718,75 g** de crème fraîche.
43,75 x 22 = **962,5 g** de sucre glace.

Prolongement : corrigé

Données

Deux types de grandeur : la quantité de truffes par boîte / la masse des boîtes de truffes
Boîte classique : 24 truffes / Boîte Quinconce : 28 truffes / Boîte Piccolo : 16 truffes / Boîte Tribu : 36 truffes

Résolution

Ordonner les boîtes en fonction de leur contenance (de la plus petite à la plus grande)

Piccolo : 16 truffes – Classique 24 truffes – Quinconce : 28 truffes – Tribu : 36 truffes

Ordonner les étiquettes : 540 g / 630 g / 810 g

Méthode 1 : Utiliser les diviseurs

Repérer que seuls 28 et 630 sont des multiples de 7, donc La boîte de 630 g contient 28 truffes, chacune de 630 : 28 = 22,5 g. Il s'agit donc de la boîte Quinconce.

La boîte Piccolo aura pour étiquette 16 X 22,5 g = 360 g,

La boîte Classique aura pour étiquette 24 x 22,5 = 540 g

Enfin, la boîte Tribu aura l'étiquette 810 g (en effet, 36 x 22,5 = 810)

Méthode 2 : Etablir les correspondances

	Piccolo	Classique	Quinconce	Tribu
Hypothèse 1	16	24	28	36
	?	540	630	810
Hypothèse 2	16	24	28	36
	540	?	630	810
Hypothèse 3	16	24	28	36
	540	630	?	810
Hypothèse 4	16	24	28	36
	540	630	810	?

Puisque toutes les truffes sont identiques (ont la même masse), il faut pour chaque couple de nombres le même rapport.

Il s'agit donc de l'hypothèse 1 car 540 :25=630 :28=810 :36=22,5 (= masse d'une truffe)

Pour trouver l'étiquette manquante (celle de la boîte Piccolo), il faut multiplier le nombre de truffes par la masse d'une truffe : 16x22,5 = 360 g