TRANSFORMATIONS DU PLAN

Table des matières

Introduction

A partir de jeux de miroirs et de défis, nous retrouverons des résultats classiques sur les symétries et les rotations. Nous proposerons ensuite de les appliquer dans quelques défis et jeux de positionnement et de mouvements.

Les diverses activités proposées travailleront les compétences suivantes :

Compétences transversales :

- *Se poser des questions,*
- *Agir et interagir sur des matériels divers,*
- *Présenter des stratégies qui conduisent à une solution,*
- *Créer des liens entre des faits ou des situations*
- *Construire une formule, une règle, schématiser une démarche, c'est-à-dire ordonner une suite d'opérations, construire un organigramme,*
- *Se servir dans un contexte neuf de connaissances acquises antérieurement et les adapter à des situations différentes,*
- *Procéder à des variations pour en analyse les effets sur la résolution ou le résultat et dégager la permanence de liens logiques.*

Compétences disciplinaires :

- *Se situer et situer des objets.*
- *Représenter sur un plan le déplacement correspondant à des consignes données.*
- *Dans un contexte de pliage, de découpage, de pavage et de reproduction de dessins, relever la présence de régularités,*
- *Décrire les différentes étapes d'une construction en s'appuyant sur des propriétés de transformations.*
- *Comprendre et utiliser, dans leur contexte, les termes usuels propres à la géométrie.*

1. Notion de symétrie axiale (orthogonale)

Introduction :

- Jeux avec un miroir
  (Jeu du miroir, Spiegeltangram, Mirakel, Jeu du dessin en miroir, Reflecto)
- Feuille défi 1 "Miroir et symétrie"
- Visualisation à l'aide de GeoGebra en cherchant ce que fait la symétrie axiale proposée et ses invariants[1]

Objectif de l'activité

Les élèves seront capables :

- de déterminer le ou les axe(s) de symétrie d'une figure (notion utilisée dans les jeux proposés)
- de reconnaître et construire avec précision l'image d'une figure par une symétrie orthogonale (feuille défi)
- de décrire en langage mathématique clair comment trouver l'image d'un point par une symétrie orthogonale (synthèse à l'aide du fichier GeoGebra montrant l'image d'un trapèze rectangle)

Notions théoriques :

Le miroir, utilisé dans les défis proposés, agit sur les figures comme une symétrie axiale : il *retourne* la figure.

Chaque point est appliqué sur un point situé de l'autre côté de l'axe, sur une perpendiculaire à celui-ci et à égale distance de l'axe.

Définitions :

La symétrie axiale est une transformation qui associe à un point A le point A' tel que d est la médiatrice du segment [AA']

La droite d est appelée axe de la symétrie orthogonale.

Notation : $S_d(A) = A'$ (A' est l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe d)

Synthèse :

$S_d(A) = A' \Leftrightarrow [AA'] \perp d$ et dist (A,d) = dist (A',d)

$\Leftrightarrow$ d est médiatrice de [AA']

Propriétés (justifications à ajouter) :

Les points de d sont fixes pour la symétrie orthogonale d'axe d

Les droites perpendiculaires à l'axe d sont globalement fixes par la symétrie d'axe d

Les distances (longueurs des segments), l'amplitude des angles (et donc le parallélisme et la perpendicularité) et les aires sont conservées.

L'orientation n'est pas conservée : une main droite devient une main gauche.

Si une droite est parallèle à l'axe de symétrie, son image est une droite parallèle à l'axe et les deux droites sont équidistances à l'axe.

Si une droite n'est pas parallèle à l'axe de symétrie, son image est une droite qui coupe l'axe au même point que la droite de départ et les deux droites font le même angle avec l'axe.

Prolongement : construction de l'image d'un point avec l'équerre, à la règle et au compas

Animation GeoGebra : https://www.geogebra.org/m/FqEa5zKx#material/WsHr4GPd

[1] https://sites.google.com/site/jeuxmathematiquesbruxelles/miroirs-et-symetries-projet-2015

Trouver l'image du point A par une symétrie d'axe d :

- Avec une règle et un compas : on trace la perpendiculaire à d qui passe par X. Elle coupe d en X. On place ensuite le point A' sur cette perpendiculaire avec |AX|=|A'X|.
- Avec le compas uniquement : on place deux points quelconques sur d et on trace deux arcs de cercle dont le centre est un de ces points et passant par A (ces deux arcs de cercle n'ont pas forcément le même rayon). Le deuxième point commun de ces deux arcs de cercle est le point A'.

Autres introductions possibles :
Pliage (avec réserves) et papier calque, transparents, quadrillages (se méfier de la position de l'axe, souvent verticale ou horizontale)

2. Rotations

Animation GeoGebra : https://www.geogebra.org/m/s8VQuscB

Introduction :

- Jeux de rotations simples (1/2 tour, ¼ tour)
- Rythmes exprimés sous forme de disques (jours de la semaine, …)
- Utilisation de deux miroirs
- Observation de rosaces
- Tracé de spirales
- …

Notions théoriques :
Eléments mis en évidence : centre, angle et amplitude (positive ou négative en fonction du sens), verbe tourner.
Définition : Transformation du plan qui fait tourner tout point autour d'un point appelé centre, en restant à une même distance de celui-ci, d'une même amplitude d'angle et dans le même sens.
Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation, centre
Composée de deux rotations de même centre : rotation de même centre et d'amplitude égale à la somme des amplitudes des deux rotations initiales

3. Symétrie centrale

Animation GeoGebra : https://www.geogebra.org/m/FqEa5zKx#material/g6WRuc3e

Introduction :

- Cartes à jouer, demi tour

Notions théoriques :
Rotation particulière (1/2 tour ou 180 °)

Définition : Transformation qui associe à un point A le point A' tel que C est le milieu du segment [AA'].
Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation, droites passant par le centre

Propriété (justification à ajouter)
Deux droites symétriques par rapport à un point sont parallèles.

4. Translations

Introduction :
- Papier peint, papier cadeau,
- Glissement de figures

Notions théoriques :

Définition : « Le point A' est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$ » signifie que les demi-droites [XY et [AA' ont la même direction et le même sens et que les segments [XY] et [AA'] ont la même longueur.
Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation
La composée de deux translations est une translation.
La composée d'une symétrie axiale et d'une translation est appelée symétrie glissée.

5. Similitudes et homothéties

Introduction : agrandissement et réduction de figures, échelles

Définitions :
- Homothétie : Transformation du plan de centre O et de rapport r (non nul) qui applique le point A sur le point A' tel que |OA'|= |r|.|OA| et A' ∊ OA. r<0 si A' ∊ [OA ; r<0 si O ∊ [AA']
- Similitude : Composée d'une isométrie et d'une homothétie.

- Figures homothétiques : Deux figures sont homothétiques si les longueurs des côtés homologues sont proportionnels et parallèles et si les amplitudes des angles homologues sont égales.
- Figures semblables : Deux figures sont semblables si les longueurs des côtés homologues sont proportionnels et si les amplitudes des angles homologues sont égales.

6. Isométries

Définition : Transformation du plan qui conserve les mesures. (« iso » signifie « même » et « metros » signifie « mesure » du grec).

7. Classement des transformations

Critère 1 : conserve (ou pas) les droites, le parallélisme
Transformations affines / transformations non affines
Critère 2 : conservent (ou pas) les proportions
Etirements, aplatissement / similitudes
Critère 3 : conservent (ou pas) les mesures
Homothéties, agrandissements, réductions / isométries
Critère 4 : conservent (ou pas) l'orientation
Symétrie axiales, symétries glissées / rotations dont symétries centrales, translations

8. Composée de symétries axiales (orthogonales)

Introduction :

- Jeux avec deux miroirs
  (Jeu de miroirs allemand du Spiegelbuch, Spiegeltangram 2.0)
- Feuille défi 2 "Miroirs et symétries"
- Visualisation à l'aide de GeoGebra en cherchant comment passer directement du trapèze rectangle de départ à celui d'arrivée, en modifiant les positions relatives des deux axes[2]

<u>Objectif de l'activité</u>
Les élèves seront capables :
- de déterminer les axes de symétrie d'une figure (notion utilisée dans les jeux proposés)
- de reconnaître et construire avec précision l'image d'une figure par une composée de deux symétries orthogonales (feuille défi)
- de décrire en langage mathématique clair comment trouver l'image d'un point par une composée de deux symétries orthogonales (synthèse à l'aide des fichiers GeoGebra montrant l'image d'un trapèze rectangle et permettant de faire varier la position relative des deux axes)

Notions théoriques : Composée de deux symétries axiales

Chaque miroir, utilisé dans les défis proposés, agit sur les figures comme une symétrie axiale : il *retourne* la figure.

Pour pouvoir trouver la figure demandée dans les différents jeux, il faut déterminer avec précision la position des deux miroirs, c'est-à-dire des axes de symétrie présents sur l'image à reconstituer.

On observe que si les axes sont perpendiculaires, on retrouve avec les miroirs 4 images.

[2] https://sites.google.com/site/jeuxmathematiquesbruxelles/miroirs-et-symetries-projet-2015

Avec GeoGebra, on observe que la figure obtenue a la même orientation que celle de départ, mais a été tournée de 180°.
En faisant varier l'angle entre les axes de symétrie, on trouve que la figure subit une rotation dont le centre est le point d'intersection des deux axes de symétrie, et dont l'amplitude vaut le double de l'angle entre ces deux axes. Ceci explique le résultat précédent.
On peut vérifier cela en reproduisant une situation où des images sont reproduites six ou huit fois, correspondant à un angle entre les miroirs de 60° ou 45°.

A ce stade, on peut se demander ce qui se passerait si les axes étaient parallèles, situation non reprise dans les jeux et défis, mais que l'on peut simuler à l'aide d'un fichier GeoGebra.
On observe que la figure subit une translation dont la longueur (norme) du vecteur est égale au double de la distance entre les deux axes.
Si on essaie de reproduire cette situation à l'aide de miroirs, on obtient une image qui se reproduit indéfiniment sur le miroir.

Ceci nous permet de retrouver les autres transformations (isométriques) du plan : la symétrie centrale, la rotation et la translation.
Ces transformations peuvent également être définies, et ont également des invariants (voir lexique).
Constructions géométriques en général : https://www.youtube.com/user/FHuinbe/videos

Applications
Le kaléidoscope est construit sur ce principe de miroirs et de composées de symétries.
Une serviette pliée et découpée pour lesquelles il faut trouver les coups de ciseaux, ou ce qu'elle donnera une fois dépliée constituent un autre défi intéressant.
L'analyse de mandalas est encore un autre contexte original pour retrouver des éléments se symétrie (symétries ou rotations)

Autres composées

Résultats importants (à justifier[3]) :

- Tout déplacement se réduit à une seule translation ou une seule rotation.
- Tout retournement est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation (ou d'une rotation).
-

9. Chemins et miroirs

Introduction :

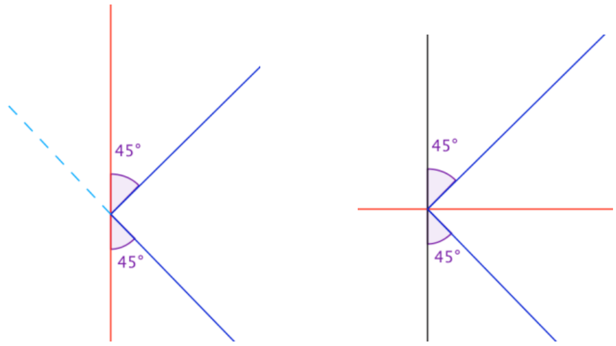
- Jeu Laser Maze, jeu sur tablette (Miroirs et réflexions puzzles, lasers and mirrors) (Jeu de miroirs allemand du Spiegelbuch, Spiegeltangram 2.0)
- Feuille défi 3 "Rallye 2015"

Objectif de l'activité
Les élèves seront capables d'anticiper des déplacements avec variation de trajectoire à l'aide de réflexions sur des miroirs.

[3] Voir « Géométrie en situations », p. 69 à 73

Notions théoriques : réflexion et symétrie

Cherchons les liens entre les symétries vues auparavant à l'aide de miroirs et la situation présentée. Nous pouvons visualiser la situation de deux façons différentes.



Le miroir est l'axe de la symétrie qui appliquerait le prolongement virtuel du rayon sur le rayon réfléchi.
La droite perpendiculaire au miroir est l'axe de la symétrie qui applique le rayon incident sur le rayon réfléchi.

En physique, la situation proposée ici est un cas bien particulier de réflexion.
On peut se demande ce qui se passerait si l'angle d'inclinaison n'était pas 45°, ou si le rayon passait d'un milieu dans un autre.

<u>Applications</u>
La situation proposée se retrouve de façon plus générale lorsqu'on cherche comment va évoluer une boule de billard qui cogne le bord de la table de billard.

10. Superposition et transparence

<u>Introduction :</u>
- Jeux : Vitrail, Swish
- Feuille défi 4 "Superposition et transparence"

<u>Objectif de l'activité</u>
Les élèves seront capables d'anticiper des transformations et de les verbaliser.

<u>Synthèse</u>
Description des stratégies utilisées par les élèves et des résultats trouvés

11. Positionnement et puzzle 3 pièces

<u>Introduction :</u>
- Feuille défi 5 "Transformer le carré"
- Jeux : Parketto, Puzzle 3 pièces

<u>Objectif de l'activité</u>
Les élèves seront capables d'anticiper des transformations et de décrire les étapes de différentes constructions.

<u>Synthèse pour le puzzle 3 pièces</u>

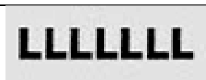
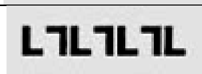
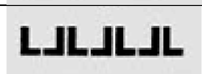
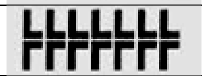
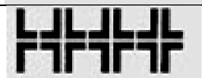
Visualisation des transformations appliquées au carré découpé à partir de GeoGebra[4], (autre possibilité : usage du TBI)

12. Frises

Introduction : Jeu : Frises à classer
Jeu proposé : 7 familles de 4 frises de même type à reconstituer

Objectif de l'activité
Dans un contexte ludique de pavage et de reproduction de dessins, utiliser la présence de régularités.

Synthèse
Il y a 7 types de frises, classés selon leurs éléments de symétrie :

Nom (cristallographie)	Eléments de symétrie	Exemple
f1	translation	
f2	translation et symétries centrales	
fm1	translation et symétries d'axe vertical	
f1m	translation et symétrie d'axe horizontal	
f1g	translation et symétrie glissée	
fm2	translation et symétrie d’axe vertical et symétrie centrale	
f2m	translation et symétrie centrale et symétrie d’axe horizontal	

Complément : vidéos :
- Frises, pavages et cristallographie : https://www.youtube.com/watch?v=c-lDS6hgduA
- Classement des frises : https://www.youtube.com/watch?v=nK4sswYCKVE
- Frises etc : https://www.youtube.com/watch?v=c-lDS6hgduA&feature=youtu.be

13. Pavages périodiques du plan

Introduction : Jeu : Pavages à associer

Objectif de l'activité
Dans un contexte ludique de pavage et de reproduction de dessins, utiliser la présence de

[4] https://sites.google.com/site/jeuxmathematiquesbruxelles/miroirs-et-symetries-projet-2015

régularités.

Synthèse

Il y a 17 types de pavages, classés selon leurs éléments de symétrie[5] :

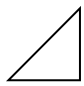
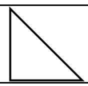
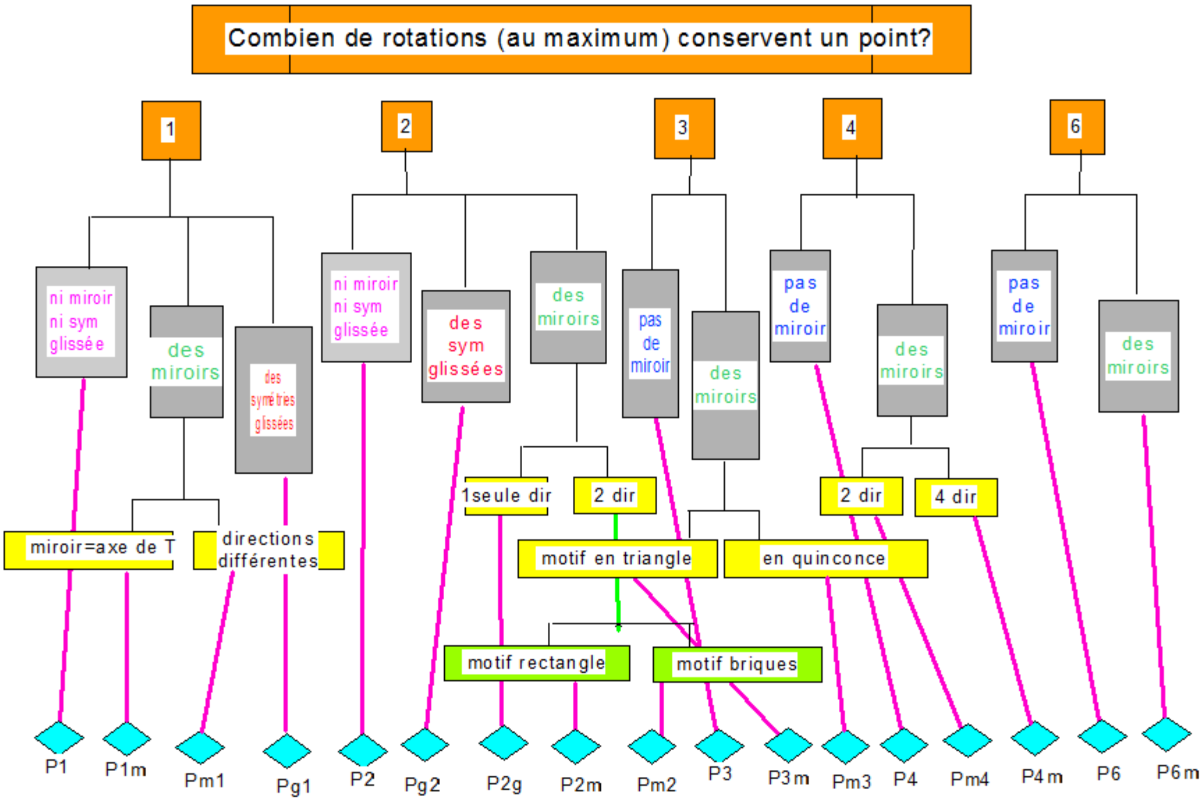
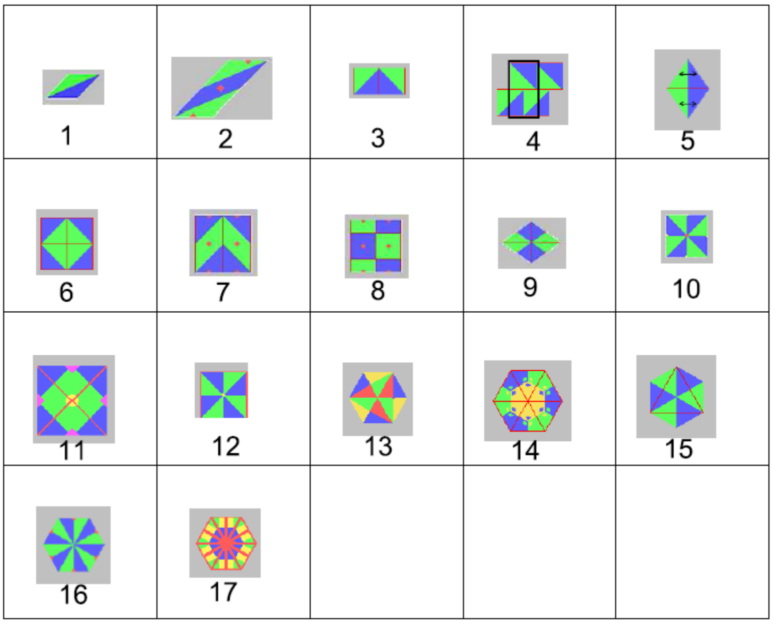
Notation	Construction
p1	translations à partir d'un parallélogramme
p2	rotation d'angle π + translations à partir d'un parallélogramme
p3	3 rotations d'angle 2π/3 + translations à partir d'un losange d'angle 2π/6 et 2π/3
p4	4 rotations d'angle π/2 + translations à partir d'un carré
p6	rotation d'angle π à partir d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet est 2π/3 + 3 rotations d'angles 2π/3 à partir de la figure obtenue + translations
pm1	symétrie axiale à partir d'un triangle isocèle + translations
p1m	symétrie axiale à partir d'un rectangle + translations
p1g	symétrie glissée (axe au milieu de la figure) + translations
pm2	symétrie axiale à partir d'un côté de l'angle droit d'un triangle + symétrie axiale de la figure obtenue + translations
p2m	symétrie axiale à partir d'un rectangle + symétrie axiale de la figure obtenue + translations
p2g	rotation d'angle π d'un rectangle + symétrie axiale de la figure obtenue + translations
pg2	symétrie glissée (axe au milieu de la figure) d'un rectangle + rotation d'angle π de la figure obtenue + translations
p3m	symétrie axiale à partir d'un triangle équilatéral + 3 rotations d'angles 2π/3 + translations
pm3	symétrie axiale à partir d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet est 2π/3 + 3 rotations d'angles 2π/3 + translations
p4m	symétrie axiale à partir de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle + rotations d'angle π/2 + translations 
pm4	idem p4m mais dans un autre sens 
p6m	symétrie axiale d'un triangle rectangle dont un angle vaut π/3 + 6 rotations d'angle π/3

Tableau de classification des pavages[6]

[5] Repris du document sur les symétries : http://dev.ulb.ac.be/urem/Le-monde-magique-des-symetries
[6] schéma proposé par G. De Meur lors de l'exposition "Symétries du monde" en 2000



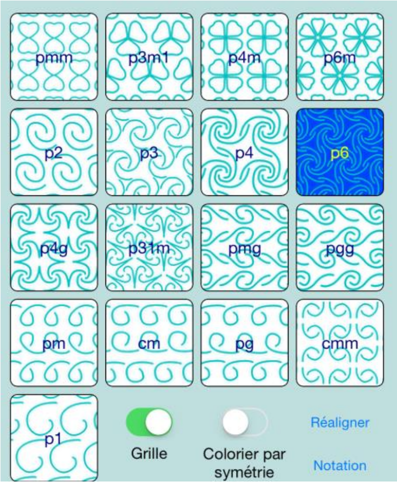
Combien de rotations (au maximum) conservent un point?
1
2
3
4
6
ni miroir ni sym glissée
des miroirs
des symétries glissées
ni miroir ni sym glissée
des sym glissées
des miroirs
pas de miroir
des miroirs
pas de miroir
des miroirs
pas de miroir
des miroirs
miroir=axe de T
directions différentes
1seule dir
2 dir
2 dir
4 dir
motif en triangle
en quinconce
motif rectangle
motif briques
P1
P1m
Pm1
Pg1
P2
Pg2
P2g
P2m
Pm2
P3
P3m
Pm3
P4
Pm4
P4m
P6
P6m



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

(extrait de http://www.scienceu.com/geometry/articles/tiling/wallpaper.html)

Illustration sur tablette : "*KaleidoPaint*"



Document Geogebra sur Internet :
http://tube.geogebra.org/material/show/id/108037
Vidéo du Palais de la découverte (Paris) : http://www.palais-decouverte.fr/fr/au-programme/expositions-permanentes/toutes-les-salles/salles-de-mathematiques/visite-libre/symetries/classer-grace-aux-symetries/

Autres pavages

Pavages à l'aide d'une forme
- polygones réguliers et 3 pavages réguliers (triangles équilatéraux, carrés, hexagones)
- polygones réguliers et 8 pavages semi-réguliers

  Un pavage est dit semi-régulier s'il est constitué de deux polygones réguliers convexes ou plus, de telle façon qu'un sommet soit toujours entouré des mêmes polygones, dans le même ordre.

  Dans le cas du plan euclidien, il existe huit pavages semi-réguliers :

  - pavage carré adouci : deux triangles équilatéraux, carré, triangle équilatéral et carré ;
  - pavage carré tronqué : carré et deux octogones ;
  - pavage hexagonal adouci : quatre triangles équilatéraux et un hexagone ;
  - pavage hexagonal tronqué : triangle équilatéral et deux dodécagones ;
  - pavage grand rhombitrihexagonal : carré, hexagone et dodécagone ;
  - pavage petit rhombitrihexagonal : triangle équilatéral, carré, hexagone et carré ;
  - pavage triangulaire allongé : trois triangles équilatéraux et deux carrés ;
  - pavage trihexagonal : triangle équilatéral, hexagone, triangle équilatéral et hexagone.

  Le pavage hexagonal adouci est chiral : il en existe deux formes distinctes par symétrie. Les autres pavages sont achiraux.

- triangles (quelconques)
- quadrilatères (quelconques) : animation : http://tube.geogebra.org/student/m1315905 et via le site www.jeuxmath.be
- pentagones (15 types)[7]
- hexagones

Création de pavages à partir d'une enveloppe :
Vidéo explicative : https://www.youtube.com/watch?v=JAN-Eh19YMQ&feature=youtu.be

[7] Informations plus complètes sur le site http://mathamort.e-monsite.com/pages/geogebra/pavage-du-plan-avec-des-pentagones.html

Animations sur http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_enveloppe.htmb
Autre source intéressante : http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article505

Exemples variés de pavages : http://fr.tessellations-nicolas.com/humains.php

Travail de recherche sur les pavages effectué par des élèves de début de secondaire dans le cadre du projet Maths en Jeans :
http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2008/Epinal_2008/Pavage_du_plan.pdf

14. Symétries du cube

Cette fois, on s'intéresse à toutes les transformations géométriques qui conservent une figure donnée, sa structure. Le nom général est automorphisme, mais on utilise aussi le terme symétrie, qui prend ici une signification beaucoup plus large, puisqu'il englobe aussi les rotations.

Défi 8A: Rechercher les transformations du plan qui conservent un hexagone.

Solution :

- l'identité
- une symétrie centrale dont le centre est celui de l'hexagone,
- 3 symétries axiales dont l'axe passe par deux sommets opposés,
- 3 symétries axiales dont l'axe passe par le milieu de deux côtés opposés
- 4 rotations de 1/6, 1/3, 2/3 et 5/6 de tour (les deux autres rotations, l'identité et la symétrie centrale, ont déjà été reprises.

On a donc trouvé ici 12 transformations (ou automorphismes)

Remarque : autre méthode : travailler en étapes.
1°) Par rotation, un sommet peut être envoyé sur n'importe quel sommet (6 possibilités)
2°) Une fois ce sommet fixé, on peut encore permuter (ou pas) les deux sommets adjacents par une symétrie axiale.
Dès que deux points sont fixés, tous le sont.
Ceci donne au total 6.2 = 12 transformations

Défi 8B : Rechercher les transformations de l'espace qui conservent un cube (qui pourrait être matérialisé par l'Atomium).

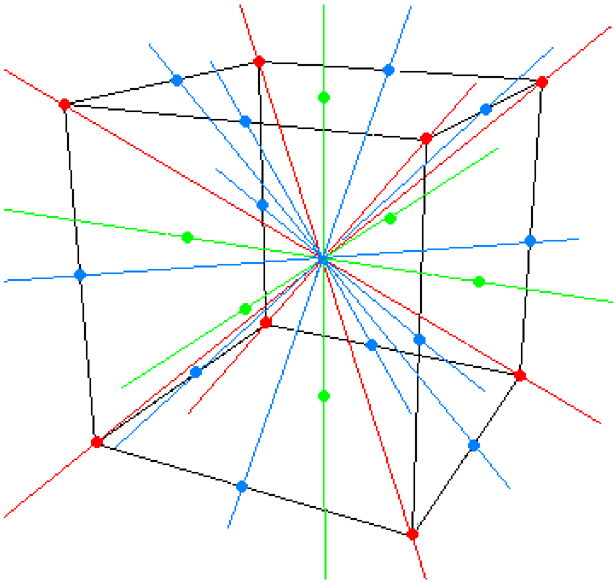
Préliminaire : quelles transformations utiliser ?
Dans l'espace, on a des symétries par rapport à un plan (ou symétries bilatérales), par rapport à une droite (ou symétrie axiale), et par rapport à un point (symétrie centrale). On retrouve également des rotations par rapport à un axe.

Solution :

- 3 symétries dont le plan de symétrie comprend les milieux de 4 arêtes et parallèles à 2 faces (le cube a 6 faces, il y en a donc 3).

- 6 symétries dont le plan de symétrie comprend deux arêtes opposées (le cube a 12 arêtes, il y en a donc 6)
- 1 symétrie centrale (le centre est le centre du cube)
- l'identité ou transformation identique
- 9 rotations de ¼, ½ ou ¾ de tour dont l'axe comprend le centre de deux faces opposées (en vert sur la figure)
- 6 rotations de ½ tour dont l'axe comprend le milieu de deux arêtes opposées (en bleu sur la figure)
- 8 rotations de 1/3 ou 2/3 tour dont l'axe comprend deux sommets opposés (en rouge sur la figure)
- Chaque rotation de 1/4, 1/3, 2/3 et ¾ tour (soit 14 en tout) peut être combinée à une symétrie bilatérale de plan perpendiculaire à l'axe de la rotation, ce qui donne une « antirotation »

On a donc au total 48 transformations.
La figure suivante reprend les différents axes de rotations.



<u>Remarque</u> : autre méthode : travailler en étapes.
1°) Par symétrie, un sommet peut être envoyé sur n'importe quel sommet par une rotation (8 possibilités)
2°) Une fois ce sommet fixé, on peut encore permuter (ou pas) les trois sommets adjacents par une symétrie axiale (3 possibilités).
3°) Une fois deux sommets (et donc une arête fixée), on peut encore permuter (ou pas) certains sommets à l'aide d'une symétrie bilatérale dont le plan passe par l'arête fixée (2 possibilités)
Dès que deux trois points sont fixés, tous le sont.
Ceci donne 8.3.2= 48 transformations

15. Jeux sur le sujet

Voir document "Transformations et objets géométriques"

Jeux que l'on pourrait ajouter
Flexagones, Black box, Copy right, Octogones et rotations + symétries, Scientibox, Puzzle 3 pièces, Line cubes, Victor et le château aux 1000 miroirs, pliages, coups de ciseaux pour obtenir un dessin donné, …

16. Vision interdisciplinaire du sujet

Exemples

- Symétries et arts, illusions d'optique, architecture
- Symétries et architecture
- Symétries et musique
- Symétries et physique, chimie, biologie, géographie
- Miroirs et anamorphose, kaléidoscopes
- Histoires de miroirs et de symétries
- Palindromes

Voir diaporamas

17. Lexique sur les transformations du plan

Vocabulaire spécifique	***Signification***	***Introductions et applications***
Figures homothétiques	Deux figures sont homothétiques si les longueurs des côtés homologues sont proportionnels et parallèles et si les amplitudes des angles homologues sont égales.	
Figures semblables	Deux figures sont semblables si les longueurs des côtés homologues sont proportionnels et si les amplitudes des angles homologues sont égales.	
Homothétie	Transformation du plan de centre O et de rapport r (non nul) qui applique le point A sur le point A' tel que $\|OA'\|= \|r\|.\|OA\|$ et A' ∊ OA r<0 si A' ∊ [OA r<0 si O ∊ [AA']	Agrandissement et réduction. Rapport associé à l'échelle.
Invariants	Ensembles des propriétés qui ne varient pas après une transformation du plan.	
Isométrie	Transformation du plan qui conserve les mesures. (« iso » signifie « même » et « metros » signifie « mesure » du grec). Utilisation ultérieure : cas d'isométrie des triangles	Intro par puzzle à 3 pièces en cherchant les transfos utilisées (2^{e}).

Médiatrice d'un segment	Perpendiculaire à ce segment passant par son milieu. Lieu des points situés à même distance (càd équidistants) des extrémités de ce segment. <u>Remarques</u> : - Dans un triangle, les médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle. - La médiatrice d'un segment est aussi un axe de symétrie de ce segment.	Pliage, construction, lieu géométrique
Milieu	Point d'un segment situé à égale distance de ses extrémités.	
Points fixes	Points appliqués sur eux--mêmes lors d'une transformation.	
Rapport d'homothétie	Rapport r = $\frac{\lvert OA' \rvert}{\lvert OA \rvert}$ Quotient de la longueur centre-image et la longueur centre-origine.	
Rotation	Transformation du plan qui fait tourner tout point autour d'un point appelé centre, en restant à une même distance de celui-ci, d'une même amplitude d'angle et dans le même sens. Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation, centre	Situation concrète (puzzle, double miroir) et verbalisation (verbe "tourner")
Similitude	Composée d'une isométrie et d'une homothétie. Utilisation ultérieure : cas de similitude des triangles	
Symétrie centrale de centre C	Transformation qui associe à un point A le point A' tel que C est le milieu du segment [AA'] Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation, droites passant par le centre	Situation concrète (puzzle, pliage, miroir) et verbalisation (verbe "tourner")
Symétrie orthogonale ou axiale d'axe d	Transformation qui associe à un point A le point A' tel que d est la médiatrice du segment [AA'] Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, droites perpendiculaires à l'axe et points de l'axe	Situation concrète (puzzle, pliage, miroir) et verbalisation (verbe "retourner")
Translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$	« Le point A' est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{XY}$ » signifie que les demi-droites [XY et [AA' ont la même direction et le même sens et que les segments [XY] et [AA'] ont la même longueur.	Situation concrète (puzzle, pliage, miroir) et verbalisation (verbe "glisser"

	Invariants : distances, amplitude des angles, parallélisme, perpendicularité, aires, alignement, orientation	
Vecteur d'une translation	Objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.	

Proposition de progression

Concepts	Objectifs spécifiques associés	Mots clés
Transformation	1. Reconnaître une transformation donnée dans la vie quotidienne, lui associer un verbe de mouvement, dire si l'image est déformée ou pas. 2. Construire concrètement (mouvement, pliage, miroir, calque …) l'image d'un point, d'un objet par la transformation 3. Reconnaître et définir les éléments caractéristiques (points fixes etc.) de la transformation 4. Trouver de nouveaux exemples d'utilisation de la transformation, dans la réalité et sur des supports numériques. 5. Construire l'image d'un point, d'un objet avec des outils (équerre, rapporteur). Pour la symétrie orthogonale, penser à des axes obliques. 6. Maîtriser les notations associées à la transformation. 7. Déterminer les propriétés, les invariants (longueurs, angles, sens, alignement, orientation, aire, rapport de similitude) 8. Classer les transformations connues (isométries, similitudes, autres (déformations)) 9. Construire la composée de plusieurs transformations. 10. Déterminer les propriétés des composées de transformations	Symétrie orthogonale ou axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie. Isométrie, similitude Axe de symétrie, centre de symétrie Glisser, retourner, tourner, agrandir, rétrécir Longueur, aire, angles Orientation, sens, alignement
Applications	11. Déterminer les transformations qui conservent une figure (axe de symétrie, centre de symétrie, rotations d'1/n de tour) (peut être fait avant) 12. Jeux de miroirs, de feuilles transparentes 13. Liens avec d'autres disciplines 14. Construire des frises, des pavages (peut être fait avant, en complément) 15. Rechercher les automorphismes (symétries au sens large) d'une figure plane, d'un solide.	

18. Références

Bibliographie

- Revue Tangente HS n°35 (2009) « *Les transformations, de la géométrie à l'art* ». Paris : Pôle.
- BELLINGERI P., DEDO M., DI SIENO S., TURRIBNI Cr. (2002). "*Symétries et jeux de miroirs* ». Paris : Pôle.
- BOULE Fr. (2001). « *Questions sur la géométrie et son enseignement* ». Paris : Nathan Pédagogie.
- CASAMAYOU-BOUCAU A. et PANTIGNY Fr. (2012). *« Les maths au collège. Démontrer pour comprendre* ». Paris : Ellipses.
- COJEREM (1995). « *Des situations pour enseigner la géométrie* ». Louvain-la-Neuve : De Boeck.
- DENIERE J. et L. (2000). « *La géométrie pour le plaisir, Tome 3* ». Dunkerque.
- GERON C., LUCAS Fr., ORY S., PIRLOT M.-A., WANTIEZ P., WAUTERS A. (2015). « *Apprivoiser l'espace et le monde des formes* ». Louvain-la-Neuve : De Boeck.
- NICOLAS A. (2006), *« Parcelles d'infini »*. Paris : Belin
- PALLASCIO et coll. (2000). « *Mathématiques d'hier et aujourd'hui ».* Québec : Modulo
- RICHER I. (2016). « *Des activités mathématiques qui sortent de l'ordinaire ».* Québec : Chenelière Education.
- ROEGIERS X. (1998). *« Les mathématiques à l'école élémentaire, Tome 2* ». Bruxelles : De Boeck.
- VAN DE WALLE J. A., LOVIN L. H. (2007). « *L'enseignement des mathématiques ; l'élève au centre de son apprentissage, Tome 1 ».* Québec : ERPI.
- WITTMANN Erich Ch. (1999). « *Géométrie élémentaire et réalité ». Bruxelles :* Didier Hatier, Bruxelles.

Sitographie :

http://dev.ulb.ac.be/urem/Le-monde-magique-des-symetries
http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm
https://www.geogebra.org/search/perform/search/symétrie
http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article505
http://www.jeuxmath.be/
http://mathenjeans.free.fr/adh/articles/2008/Epinal_2008/Pavage_du_plan.pdf
http://mcescher.frloup.com/
http://jlsigrist.com/
http://www.ulb.ac.be/soco/matsch
http://www.uvgt.net/methdosymortho.pdf